
Examen intermédiaire

Programmation IV

fin sem. 2004

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Exercice	Points	Points obtenus
1	10	
2	15	
Total	25	

Exercice 1 : Triangle de Pascal (10 points)

Ecrivez une fonction *réursive terminale* `pascal` qui calcule les éléments du *triangle de Pascal* et retourne une liste de listes d'entiers de taille `n` :

```
def pascal(n: Int): List[List[Int]] = {  
  ...  
  if (n < 1) List(1) else iter(...)  
}
```

Par exemple l'instruction `System.out.println(pascal(7))` retourne le résultat suivant :

```
List(List(1,6,15,20,15,6,1),  
      List(1,5,10,10,5,1),  
      List(1,4,6,4,1),  
      List(1,3,3,1),  
      List(1,2,1),  
      List(1,1),  
      List(1))
```

On utilise la propriété suivante pour calculer les éléments d'une ligne row_i :

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & .. & x_n & 0 & \text{(left shifted } row_{i-1}) & [1] \\ + & 0 & x_0 & & x_{n-1} & x_n & \text{(right shifted } row_{i-1}) & [2] \\ \hline = & x_0 & x_1 + x_0 & x_2 + x_1 & .. & x_n + x_{n-1} & x_n & (row_i) & [3] \end{array}$$

Indications : ajoutez dans `pascal` les fonctions auxiliaires `shiftLeft` (opération [1]), `shiftRight` (opération [2]) et `iter` (opération [3], fonction *réursive terminale*).

Exercice 2 : Preuve par induction structurelle (15 points)

Démontrez l'égalité

```
replaceHead(xs.last, replaceLast(xs.head, xs))  
= replaceLast(xs.head, replaceHead(xs.last, xs))
```

par *induction structurelle* sur *xs*.

Les deux fonctions `replaceHead` et `replaceLast` sont définies comme suit :

```
def replaceHead[A](x: A, xs: List[A]) = xs match {  
  case Nil => Nil // 1ère clause  
  case y::ys => x::ys // 2ième clause  
}  
  
def replaceLast[A](x: A, xs: List[A]): List[A] = xs match {  
  case Nil => Nil // 1ère clause  
  case y::Nil => List(x) // 2ième clause  
  case y::ys => y::replaceLast(x, ys) // 3ième clause  
}
```

Indication : justifiez *chaque* étape de réduction comme présenté dans le cours, c.à.d. en indiquant par exemple "(selon 1ère clause de `replaceHead`)".