Semaine 14

Semaine 12:
il existe des langages non-semi-décidables
il existe des langages indécidable, mais semi-décidables.

Semaine 13:
comment déduire depuis ces résultats encore plus
d'autre résultats sur des problèmes « peu décidables ».

Semaine 14:
certains résultats très importants pour l'Informatique
qui n'ont rien à voir avec les MT.

4.10.1 Définition (Jeu de Domino) Soit Σ un alphabet.
Une *jeu de domino* (A, B) de taille $k \in \mathbb{N}$
est une paire d'applications $A, B : [1, k] \to \Sigma^*$.

4.10.2 Notation Un jeu de domino (A, B) de taille $k \in \mathbb{N}$ définit une liste fini de paires que nous notons :

$$\left[\frac{A(1)}{B(1)}\right], \left[\frac{A(2)}{B(2)}\right], \cdots, \left[\frac{A(k)}{B(k)}\right]$$

4.10.3 Définition Soit Σ un alphabet et $f : [1, k] \to \Sigma^*$.
Soit $I = i_1 \cdot i_2 \ldots \cdot i_m \in [1, k]^+$ un mot non vide. On définit :

$$f\langle I\rangle \triangleq f(i_1) \cdot f(i_2) \cdot \ldots \cdot f(i_m)$$

4.10.4 Définition (PCP) Soit Σ un alphabet, (A, B) un jeu de domino de taille $k \in \mathbb{N}$ et $I \in [1, k]^+$.

1. I est une *solution* de (A, B) si $A\langle I\rangle = B\langle I\rangle$.

Le *problème de correspondance de Post* (PCP) consiste à déterminer si un jeu de domino (A, B) donné a une solution ou non. Un jeu (A, B) est une *instance du PCP*.

4.10.4 Définition (PCP)

2. I est une *solution partielle* de (A, B) si
   (a) $A\langle I\rangle$ est préfixe de $B\langle I\rangle$, ou
   (b) $B\langle I\rangle$ est préfixe de $A\langle I\rangle$.

4.10.5 Lemme Soit Σ un alphabet, (A, B) une instance de taille k du PCP et $I \in [1, k]^+$ une solution de (A, B).
Alors tout préfixe de I est une solution partielle de (A, B).

4.10.6 Définition (PCPM) Soit Σ un alphabet, (A, B) un jeu de domino de taille k et $I \in [1, k]^*$. I est *solution* de (A, B) selon le *PCP modifié* (PCPM) si :

$$A\langle 1 \cdot I\rangle = B\langle 1 \cdot I\rangle$$

(A, B) est une *instance du PCPM*.

4.10.7 Définition Toute instance (A, B) du PCP(M) peut être encodé en binaire, et en utilisant un symbole séparateur de la façon suivante :
- prendre la taille de l'alphabet ;
- déterminer le nombre de bits nécessaire ;
- commencer par coder ce nombre en binaire ;
- puis, en binaire, toutes les paires de l'instance du PCP ;
- séparer à chaque fois la suite avec le séparateur.

Les langages PCP et PCPM sont ainsi définis (de maniére injective) pa des ensembles de mots sur un alphabet fini (ici, de taille 3).

$$\begin{aligned} \mathrm{PCP}^{\oplus} &\triangleq \{\, w \in \mathrm{PCP} \mid w \text{ est soluble} \,\} \\ \mathrm{PCPM}^{\oplus} &\triangleq \{\, w \in \mathrm{PCPM} \mid w \text{ est soluble} \,\} \end{aligned}$$

4.10.8 Théorème $\mathrm{PCPM}^{\oplus} \leq_{\mathrm{red}} \mathrm{PCP}^{\oplus}$.

4.10.9 Théorème $\mathrm{PCP}^{\oplus}$ est semi-décidable.

4.10.8 Théorème $\boxed{\mathrm{PCPM}^{\oplus} \leq_{\mathrm{red}} \mathrm{PCP}^{\oplus}.}$

4.10.11 Théorème $\boxed{L_{\mathrm{U}} \leq_{\mathrm{red}} \mathrm{PCPM}^{\oplus}.}$

4.8.5 Corollaire (Principe de réduction)

Soit Σ et Δ deux alphabets, $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\mathrm{red}} B$.
1. Si A n'est pas décidable, alors B n'est pas décidable.
2. Si A n'est pas semi-décidable, alors B n'est pas semi-décidable.

4.10.12 Corollaire $\boxed{\text{PCPM}^{\oplus} \text{ et PCP}^{\oplus} \text{ sont indécidable.}}$

3.3.1 Définition Une grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$ est *ambiguë* s'il existe un mot $w \in \mathrm{L}(G)$ avec au moins deux arbres d'analyse distincts.

3.3.2 Théorème Il n'existe pas d'algorithme qui détermine si une grammaire est ambiguë.

4.10.14 Théorème Soit (A, B) une instance du PCP.
(A, B) est soluble ssi $\boxed{G_{AB}}$ est ambiguë.

4.10.15 Corollaire Le problème qui consiste à décider l'ambiguïté d'une grammaire quelconque est indécidable.

4.10.13 Définition

Soit (A, B) une instance de taille k du PCP sur l'alphabet Σ.
Soit, pour tout $1 \leq j \leq k$: $w_j \triangleq A(j)$ et $x_j \triangleq B(j)$.
Soit $a_1, \ldots, a_k$ des nouveaux symboles. Alors,

$$G_{AB} \triangleq (\{ S, S_A, S_B \}, \Sigma \cup \{ a_1, \ldots, a_k \}, P, S)$$

est la grammaire (non-contextuelle) définie par :

$$\begin{array}{lll}
S & \to_G & S_A \mid S_B \\
S_A & \to_G & w_1 a_1 \mid \cdots \mid w_k a_k \mid w_1 S_A a_1 \mid \cdots \mid w_k S_A a_k \\
S_B & \to_G & x_1 a_1 \mid \cdots \mid x_k a_k \mid x_1 S_B a_1 \mid \cdots \mid x_k S_B a_k
\end{array}$$

Résumé