# *Semaine 13*

Semaine 12:
il existe des langages non-semi-décidables
il existe des langages indécidable, mais semi-décidables.

Semaine 13:
comment déduire depuis ces résultats encore plus d'autre résultats sur des problèmes « peu décidables ».

Semaine 14:
certains résultats très importants pour l'Informatique qui n'ont rien à voir avec les MT.

### 4.8.1 Définition (Réduction)

Soit $\Sigma$, $\Delta$ deux alphabets et $A \subset \Sigma^*$, $B \subset \Delta^*$.
Une *réduction* de $A$ à $B$ est une application $\sigma : \Sigma^* \to \Delta^*$ telle que :

1. $\sigma$ est Turing-calculable par une machine totale.
2. $w \in A$ ssi $\sigma(w) \in B$

Nous écrivons $A \leq_{\text{red}} B$ s'il existe une réduction de $A$ à $B$.

### 4.8.2 Lemme

Soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois alphabets et $A_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $A_2 \subseteq \Sigma_2^*$, et $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$.
Si $A_1 \leq_{\text{red}} A_2$ et $A_2 \leq_{\text{red}} A_3$, alors $A_1 \leq_{\text{red}} A_3$.

### 4.8.3 Corollaire

Soit $\Sigma$ un alphabet, $(\Sigma^*, \leq_{\text{red}})$ est un pré-ordre.

### 4.8.4 Théorème

Soit $\Sigma$, $\Delta$ deux alphabets et $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\text{red}} B$.

1. Si $B$ est décidable, alors $A$ est décidable.
2. Si $B$ est semi-décidable, alors $A$ est semi-décidable.

### 4.8.5 Corollaire (Principe de réduction)

Soit $\Sigma$ et $\Delta$ deux alphabets, $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\text{red}} B$.

1. Si $A$ n'est pas décidable, alors $B$ n'est pas décidable.
2. Si $A$ n'est pas semi-décidable, alors $B$ n'est pas semi-décidable.

Comment démontrer qu'un langage L

- est **semi-décidable** ?
    * donner une ***MT*** qui accepte L

- est **décidable** ?
    * ou : donner une ***MT totale*** qui accepte L
    * ou : le faire pour le ***complément*** de L

Comment démontrer qu'un langage L

- est **indécidable** ou **non-semi-décidable** ?
    * ***diagonalisation***
    * ***réduction*** d'un langage connu
    * ***Rice***

    * ou : via le ***complément*** de L

        si le complément est indécidable,
        alors L est indécidable

        si le complément est semi-décidable et indécidable,
        alors L ne peut pas être semi-décidable

## 4.9.2 Définition (Propriété)

Une *propriété* $P$ sur les éléments de $X$ est un sous-ensemble de $X$. On peut le décrire :

1. par un prédicat $P(x)$, on a alors $P = \{x \in X \mid P(x)\}$,
2. ou par une fonction caractéristique $P : X \to \{0, 1\}$.

### 4.9.3 Définition (Décidabilité des propriétés)

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.

1. $P$ est *décidable* si sa fonction caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0, 1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est totale et Turing-calculable.

2. $P$ est *semi-décidable* si sa fonction semi-caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \rightharpoonup \{0, 1\}$$
$$L \mapsto 1 \qquad \text{si } L \in P$$

est Turing-calculable.

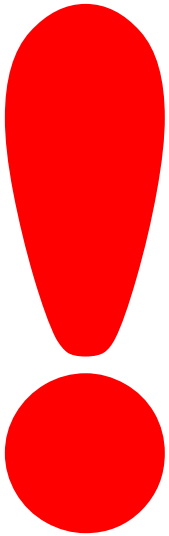
### 4.9.4 Définition

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.

$P$ est *triviale* si :

1. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 1$, ou si
2. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 0$.

Sinon $P$ est *non-triviale*.



### 4.9.5 Théorème (Rice I)

Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-triviale* est indécidable.

### 4.9.6 Définition

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.
$P$ est *monotone* si :

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}_0 \quad L \subseteq L' \Rightarrow P(L) \leq P(L')$$

Sinon $P$ est *non-monotone*.

### 4.9.7 Théorème (Rice II)

Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-monotone* est non-semi-décidable.