

*Semaine 13*

Semaine 12:

il existe des langages non-semi-décidables

il existe des langages indécidable, mais semi-décidables.

Semaine 13:

comment déduire depuis ces résultats encore plus

d'autre résultats sur des problèmes « peu décidables ».

Semaine 14:

certain résultats très importants pour l'Informatique  
qui n'ont rien à voir avec les MT.

## 4.8.1 Définition (Réduction)

Soit  $\Sigma, \Delta$  deux alphabets et  $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Delta^*$ .

Une **réduction de  $A$  à  $B$**  est une **application  $\sigma : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$**  telle que :

1.  **$\sigma$  est Turing-calculable par une machine totale.**
2.  **$w \in A$  ssi  $\sigma(w) \in B$**

Nous écrivons  **$A \leq_{\text{red}} B$**  s'il existe une réduction de  $A$  à  $B$ .

## 4.8.2 Lemme

Soit  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  trois alphabets et  $A_1 \subseteq \Sigma_1^*, A_2 \subseteq \Sigma_2^*$ , et  $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$ .  
Si  $A_1 \leq_{\text{red}} A_2$  et  $A_2 \leq_{\text{red}} A_3$ , alors  $A_1 \leq_{\text{red}} A_3$ .

## 4.8.3 Corollaire

Soit  $\Sigma$  un alphabet,  $(\Sigma^*, \leq_{\text{red}})$  est un pré-ordre.

## 4.8.4 Théorème

Soit  $\Sigma, \Delta$  deux alphabets et  $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Delta^*$  tels que  $A \leq_{\text{red}} B$ .

1. Si  $B$  est décidable, alors  $A$  est décidable.
2. Si  $B$  est semi-décidable, alors  $A$  est semi-décidable.

## 4.8.5 Corollaire (Principe de réduction)

Soit  $\Sigma$  et  $\Delta$  deux alphabets,  $A \subseteq \Sigma^*, B \subseteq \Delta^*$  tels que  $A \leq_{\text{red}} B$ .

1. Si  $A$  n'est pas décidable, alors  $B$  n'est pas décidable.
2. Si  $A$  n'est pas semi-décidable, alors  $B$  n'est pas semi-décidable.

Comment démontrer qu'un langage L

- est **semi-décidable** ?

\* donner une **MT** qui accepte L

- est **décidable** ?

\* ou : donner une **MT totale** qui accepte L

\* ou : le faire pour le **complément** de L

Comment démontrer qu'un langage L

- est **indécidable** ou **non-semi-décidable** ?

\* **diagonalisation**

\* **réduction** d'un langage connu

\* **Rice**

\* ou : via le **complément** de L

si le complément est indécidable,  
alors L est indécidable

si le complément est semi-décidable et indécidable,  
alors L ne peut pas être semi-décidable

## 4.9.2 Définition (Propriété)

Une **propriété  $P$  sur les éléments de  $X$**  est un sous-ensemble de  $X$ .  
On peut le décrire :

1. par un **prédicat  $P(x)$ , on a alors  $P = \{x \in X \mid P(x)\}$**
2. ou par une **fonction caractéristique  $P : X \rightarrow \{0, 1\}$ .**

### 4.9.3 Définition (Décidabilité des propriétés)

Soit  $P \subseteq \mathcal{L}_0$  une propriété sur les langages semi-décidables.

1.  **$P$  est décidable** si sa fonction caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est totale et Turing-calculable.

2.  **$P$  est semi-décidable** si sa fonction semi-caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$L \mapsto 1 \quad \text{si } L \in P$$

est Turing-calculable.

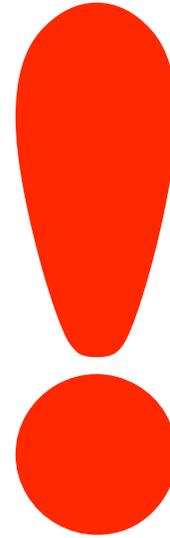
#### 4.9.4 Définition

Soit  $P \subseteq \mathcal{L}_0$  une propriété sur les langages semi-décidables.

$P$  est *triviale* si :

1.  $\forall L \in \mathcal{L}_0 . P(L) = 1$ , ou si
2.  $\forall L \in \mathcal{L}_0 . P(L) = 0$ .

Sinon  $P$  est *non-triviale*.



#### 4.9.5 Théorème (Rice I)

Toute propriété  $P \subseteq \mathcal{L}_0$  *non-triviale* est indécidable.

#### 4.9.6 Définition

Soit  $P \subseteq \mathcal{L}_0$  une propriété sur les langages semi-décidables.

$P$  est *monotone* si :

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}_0 \quad L \subseteq L' \Rightarrow P(L) \leq P(L')$$

Sinon  $P$  est *non-monotone*.

#### 4.9.7 Théorème (Rice II)

Toute propriété  $P \subseteq \mathcal{L}_0$  *non-monotone* est non-semi-décidable.

