Semaine 13

Semaine 12:
il existe des langages non-semi-décidables
il existe des langages indécidable, mais semi-décidables.

Semaine 13:
comment déduire depuis ces résultats encore plus
d'autre résultats sur des problèmes « peu décidables ».

Semaine 14:
certains résultats très importants pour l'Informatique
qui n'ont rien à voir avec les MT.

4.8.1 Définition (Réduction)

Soit Σ, Δ deux alphabets et $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$.
Une *réduction* de A à B est une application $\sigma : \Sigma^* \to \Delta^*$ telle que :

1. σ est Turing-calculable par une machine totale.
2. $w \in A$ ssi $\sigma(w) \in B$

Nous écrivons $A \leq_{\text{red}} B$ s'il existe une réduction de A à B.

4.8.2 Lemme

Soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois alphabets et $A_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $A_2 \subseteq \Sigma_2^*$, et $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$.
Si $A_1 \leq_{\text{red}} A_2$ et $A_2 \leq_{\text{red}} A_3$, alors $A_1 \leq_{\text{red}} A_3$.

4.8.3 Corollaire

Soit Σ un alphabet, $(\Sigma^*, \leq_{\text{red}})$ est un pré-ordre.

4.8.4 Théorème

Soit Σ, Δ deux alphabets et $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\mathrm{red}} B$.

1. Si B est décidable, alors A est décidable.
2. Si B est semi-décidable, alors A est semi-décidable.

4.8.5 Corollaire (Principe de réduction)

Soit Σ et Δ deux alphabets, $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\mathrm{red}} B$.

1. Si A n'est pas décidable, alors B n'est pas décidable.
2. Si A n'est pas semi-décidable, alors B n'est pas semi-décidable.

Comment démontrer qu'un langage L

- est **semi-décidable** ?
  * donner une ***MT*** qui accepte L

- est **décidable** ?
  * ou : donner une ***MT totale*** qui accepte L
  * ou : le faire pour le ***complément*** de L

Comment démontrer qu'un langage L

- est **indécidable** ou **non-semi-décidable** ?
  * ***diagonalisation***
  * ***réduction*** d'un langage connu
  * ***Rice***

  * ou : via le ***complément*** de L

    si le complément est indécidable,
    alors L est indécidable

    si le complément est semi-décidable et indécidable,
    alors L ne peut pas être semi-décidable

4.9.2 Définition (Propriété)

Une *propriété* P sur les éléments de X est un sous-ensemble de X.
On peut le décrire :

1. par un prédicat $P(x)$, on a alors $P = \{x \in X \mid P(x)\}$,
2. ou par une fonction caractéristique $P : X \to \{0, 1\}$.

4.9.3 Définition (Décidabilité des propriétés)

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.

1. $\boxed{P \text{ est } \textit{décidable}}$ si sa fonction caractéristique

$$\begin{aligned} P :\ \mathcal{L}_0 &\to \{\,0,1\,\} \\ L &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est totale et Turing-calculable.

2. $\boxed{P \text{ est } \textit{semi-décidable}}$ si sa fonction semi-caractéristique

$$\begin{aligned} P :\ \mathcal{L}_0 &\rightharpoonup \{\,0,1\,\} \\ L &\mapsto 1 \qquad\qquad \text{si } L \in P \end{aligned}$$

est Turing-calculable.

4.9.4 Définition

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.
P est *triviale* si :

1. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 1$, ou si
2. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 0$.

Sinon P est *non-triviale*.

4.9.5 Théorème (Rice I)

Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-triviale* est indécidable.

4.9.6 Définition

Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.

P est *monotone* si :

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}_0 \quad \boxed{L \subseteq L'} \Rightarrow \boxed{P(L) \leq P(L')}$$

Sinon P est *non-monotone*.

4.9.7 Théorème (Rice II)

Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-monotone* est non-semi-décidable.