Informatique Théorique 3
2004/05

Semaine 12

Quiz 1

36.84 % réponses non correctes :

Si L est semi-décidable alors L est aussi indécidable.

Pas forcément!
Prenons un langage L décidable.
L est aussi semi-décidable, mais pas indécidable.
Par contre un langage qui est semi-décidable, mais pas décidable, est in-décidable.

Quiz 2

31.58 % réponses non correctes :

S'il existe une MT non totale qui accepte L, alors L est indécidable.

Pas forcément!
On peut avoit plusieurs machines qui acceptent L.
Il suffit d'en avoir une (***il existe***) qui est totale
pour pouvoir dire que L soit décidable.

Quiz 3

26.30 % réponses non correctes :

Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \mathrm{B}, F)$ une MT.
Le langage accepté par M est défini par :
$\mathrm{L}(M) \triangleq \{\, w \in \Sigma^* \mid \text{il existe } c \text{ telle que } (q_0, 1, w) \vdash_{\mathsf{M}}^{*} c \not\vdash_{\mathsf{M}} \,\}$

c doit être acceptante !

4.4.3 Définition (Codage des entiers en binaire)

$$[\cdot] : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}^*$$

$$i \mapsto w \qquad \text{si } \mathrm{bin}(i) = 1w$$

4.4.4 Lemme

1. L'application $[\cdot]$ est bijective
   sa réciproque est définie par $[w]^{-1} = \mathrm{bin}^{-1}(1w)$.
2. De plus $[\cdot]$ respecte l'ordre lexicographique, c'est à dire :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \leq j \Leftrightarrow [i] \ll_l [j]$$

Ce lemme dit que le n^e mot selon l'ordre lexicographique est $[n]$. Réciproquement, étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$, sa position dans l'ordre lexicographique est $[w]^{-1}$.

4.5.1 Définition (Codage binaire d'une MT)

N*

Posons $d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$.
Soit $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_1, \mathrm{B}, F)$ une **MT**.
On code un élément $(q_i, X_j, q_k, X_l, d_m) \in \delta$ avec $i, j, k, l, m \in \cancel{\mathbb{N}}$, par le mot binaire suivant :

$$[\ (q_i, X_j, q_k, X_l, d_m)\ ] \triangleq 0^i\ 1\ 0^j\ 1\ 0^k\ 1\ 0^l\ 1\ 0^m$$

On ordonne les éléments de δ de la manière suivante :

$$(p, X, q, Y, d) \leq (p', X', q', Y', d') \Leftrightarrow p < p' \vee (p = p' \wedge X \leq X')$$

On code la fonction $\delta = \{z_1, \ldots, z_n\}$ (où $z_i < z_j$ si $i < j$) par :

$$[\delta] \triangleq z_1\ 11\ z_2\ \cdots\ 11\ z_n$$

Finalement le codage de M est donné par le codage de sa fonction de transition :

$$[M] \triangleq [\delta]$$

4.5.2 Lemme

La fonction $[\cdot] : \mathbf{MT} \to \{0,1\}^*$ est injective, mais pas surjective.

4.5.3 Lemme (Machine triviale)

Soit $M^{\mathrm{triv}} \triangleq (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,\mathrm{B}\}, \delta, q_1, \mathrm{B}, \{q_2\})$ avec δ définie par :

$$\delta(q_2, 0) \triangleq (q_1, 0, 0)$$

$$\delta(q_2, 1) \triangleq (q_1, 1, 0)$$

$$\delta(q_2, \mathrm{B}) \triangleq (q_1, \mathrm{B}, 0)$$

alors on a $\forall w \in \{0,1\}^* . (q_1, 1, w) \not\vdash_{M^{\mathrm{triv}}}$ et par conséquent $\mathrm{L}(M^{\mathrm{triv}}) = \emptyset$.

4.5.4 Définition

Soit dec l'application définie par :

$$\mathrm{dec} : \{0,1\}^* \to \mathbf{MT}$$

$$w \mapsto \begin{cases} M & \text{si } w = [M] \\ M^{\mathrm{triv}} & \text{sinon} \end{cases}$$

4.5.5 Notation Soit M une MT.

1. On écrit w_M pour $[M]$.
2. On écrit M_w pour $\mathrm{dec}(w)$.

4.6.1 Définition (Langage de diagonalisation)

$$L_{\mathrm{D}} \triangleq \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \notin \mathrm{L}(M_w) \}$$

4.6.2 Théorème

1. L_{D} n'est pas semi-décidable.
2. $\overline{L_{\mathrm{D}}}$ est semi-décidable.

4.7.1 Définition

Soit $M \in \mathbf{TM}$ et $w \in \{\,0,1\,\}^*$. La paire (M,w) est codée par :

$$[(M,w)] \triangleq [M]\;111\;w$$

4.7.2 Définition (Langage universel)

$$L_{\mathrm{U}} \triangleq \left\{[(M,w)] \in \{\,0,1\,\}^* \mid w \in \mathrm{L}(M)\right\}$$

4.7.3 Théorème

1. L_{U} est semi-décidable.
2. L_{U} n'est pas décidable.
3. $\overline{L_{\mathrm{U}}}$ n'est pas semi-décidable.

4.7.4 Définition (Problème de l'arrêt)

$$L_{\mathrm{H}} \triangleq \{[(M, w)] \in \{0,1\}^* \mid M \text{ s'arrête pour } w\}$$

4.7.5 Théorème

1. L_{H} est semi-décidable.
2. L_{H} n'est pas décidable.
3. $\overline{L_{\mathrm{H}}}$ n'est pas semi-décidable.