

Informatique Théorique 3

2004/05

Quiz 1

36.84 % réponses non correctes :

Si L est semi-décidable alors L est aussi indécidable.

Semaine 12

Pas forcément!

Prenons un langage L décidable.

L est aussi semi-décidable, mais pas indécidable.

Par contre un langage qui est semi-décidable, mais pas décidable, est in-décidable.

Quiz 2

31.58 % réponses non correctes :

S'il existe une MT non totale qui accepte L , alors L est indécidable.

Pas forcément!

On peut avoir plusieurs machines qui acceptent L . Il suffit d'en avoir une (**il existe**) qui est totale pour pouvoir dire que L soit décidable.

Quiz 3

26.30 % réponses non correctes :

Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ une MT.

Le langage accepté par M est défini par :

$L(M) \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid \text{il existe } c \text{ telle que } (q_0, 1, w) \vdash_M^* c \mid w \}$

c doit être acceptante !

4.4.3 Définition (Codage des entiers en binaire)

$$[\cdot] : \mathbb{N}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$$

$$i \mapsto w \quad \text{si } \text{bin}(i) = 1w$$

4.4.4 Lemme

1. L'application $[\cdot]$ est bijective sa réciproque est définie par $[w]^{-1} = \text{bin}^{-1}(1w)$.
2. De plus $[\cdot]$ respecte l'ordre lexicographique, c'est à dire

$$\forall i, j \in \mathbb{N}. i \leq j \Leftrightarrow [i] \ll_1 [j]$$

Ce lemme dit que le n^{e} mot selon l'ordre lexicographique est $[n]$. Réciproquement, étant donné un mot $w \in \{0, 1\}^*$, sa position dans l'ordre lexicographique est $[w]^{-1}$.

4.5.1 Définition (Codage binaire d'une MT)

Posons $d_1 = -1, \tilde{d}_2 = 0, d_3 = 1$.

Soit $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_1, B, F)$ une MT.

On code un élément $(q_i, X_j, q_k, X_l, d_m) \in \delta$ avec $i, j, k, l, m \in \mathbb{N}^*$ par le mot binaire suivant :

$$[(q_i, X_j, q_k, X_l, d_m)] \triangleq 0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$$

On ordonne les éléments de δ de la manière suivante :

$$(p, X, q, Y, d) \leq (p', X', q', Y', d') \Leftrightarrow p < p' \vee (p = p' \wedge X \leq X')$$

On code la fonction $\delta = \{z_1, \dots, z_n\}$ (où $z_i < z_j$ si $i < j$) par :

$$[\delta] \triangleq z_1 \ 11 \ z_2 \ \dots \ 11 \ z_n$$

Finalement le codage de M est donné par le codage de sa fonction de transition :

$$[M] \triangleq [\delta]$$

\mathbb{N}^*

4.5.2 Lemme

La fonction $[\cdot] : \text{MT} \rightarrow \{0, 1\}^*$ est injective, mais pas surjective.

4.5.3 Lemme (Machine triviale)

Soit $M^{\text{triv}} \triangleq (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$ avec δ définie par :

$$\delta(q_2, 0) \triangleq (q_1, 0, 0)$$

$$\delta(q_2, 1) \triangleq (q_1, 1, 0)$$

$$\delta(q_2, B) \triangleq (q_1, B, 0)$$

alors on a $\forall w \in \{0, 1\}^*. (q_1, 1, w) \notin M^{\text{triv}}$ et par conséquent $L(M^{\text{triv}}) = \emptyset$.

4.5.4 Définition Soit dec l'application définie par :

$$\text{dec} : \{0, 1\}^* \rightarrow \text{MT}$$

$$w \mapsto \begin{cases} M & \text{si } w = [M] \\ M^{\text{triv}} & \text{sinon} \end{cases}$$

4.5.5 Notation Soit M une MT.

1. On écrit w_M pour $[M]$
2. On écrit M_w pour $\text{dec}(w)$

4.6.1 Définition (Langage de diagonalisation)

$$L_D \triangleq \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \notin L(M_w)\}$$

4.6.2 Théorème

1. L_D n'est pas semi-décidable.
2. $\overline{L_D}$ est semi-décidable.

4.7.1 Définition

Soit $M \in \text{TM}$ et $w \in \{0, 1\}^*$. La paire (M, w) est codée par :

$$[(M, w)] \triangleq [M] 111 w$$

4.7.2 Définition (Langage universel)

$$L_U \triangleq \{[(M, w)] \in \{0, 1\}^* \mid w \in L(M)\}$$

4.7.3 Théorème

1. L_U est semi-décidable.
2. L_U n'est pas décidable.
3. $\overline{L_U}$ n'est pas semi-décidable.

4.7.4 Définition (Problème de l'arrêt)

$$L_H \triangleq \{[(M, w)] \in \{0, 1\}^* \mid M \text{ s'arrête pour } w\}$$

4.7.5 Théorème

1. L_H est semi-décidable.
2. L_H n'est pas décidable.
3. $\overline{L_H}$ n'est pas semi-décidable.