

# Informatique Théorique 3

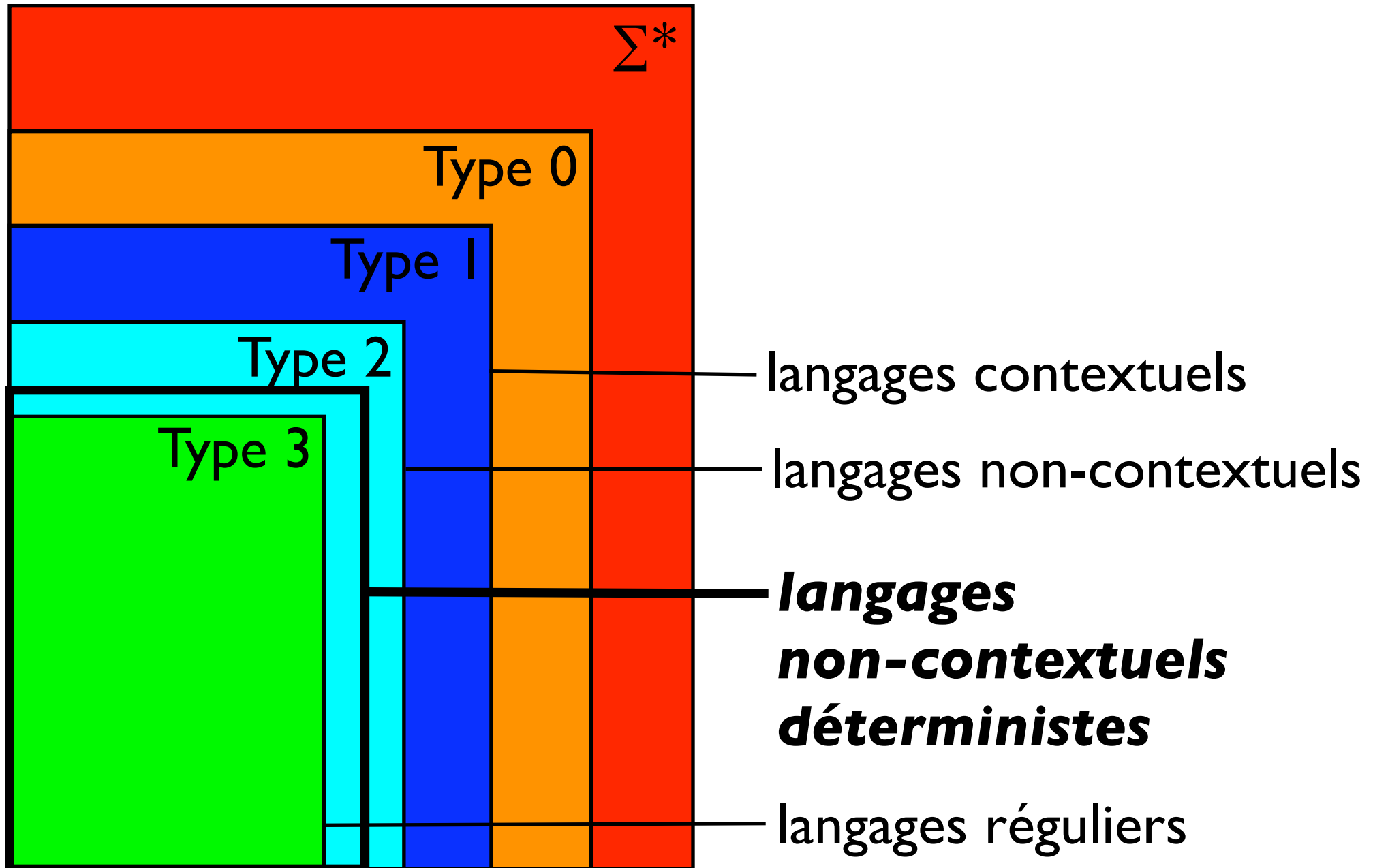
## 2004/05

### *Semaine 10*

Voir [HMU03] §6.4.

Voir [HMU03] §7.3, et [Koz97] §G.

# Hiérarchie de Chomsky ...



# AAPD

## 3.7.1 Définition (AAPD)

Un *automate à pile déterministe (AAPD)* est un automate à pile

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$$

qui satisfait, pour tout  $q \in Q$ ,  $a \in \Sigma$  et  $X \in \Gamma$ :

$$\#(\Delta(q, a, X)) + \#(\Delta(q, \mathbf{e}, X)) \leq 1$$

# AAPD vs AFD (I)

**3.7.2 Définition (Propriété préfixe)** Soit  $L$  un langage. On dit que  $L$  satisfait la **propriété préfixe** si :

$$\forall x, y \in L. (x \neq y \implies \neg \exists w \in \Sigma^*. (x = yw \vee y = xw))$$

**3.7.4 Théorème** Soit  $L$  un langage. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un AAPD  $M$  tel que  $L_{\text{pile}}(M) = L$ .
2. Il existe un AAPD  $M$  tel que  $L_{\text{état}}(M) = L$  et  $L$  satisfait la propriété préfixe.

**3.7.3 Théorème**

1. Si  $L$  est régulier, alors il existe un AAPD  $M$  tel que  $L_{\text{état}}(M) = L$ .
2. Il existe  $L$  régulier tel que pour tout AAPD  $M : L_{\text{pile}}(M) \neq L$ .

# AAPD vs AFD (II)

3.7.5 **Définition (Langage non-contextuel déterministe)** Un langage  $L$  est dit *non-contextuel déterministe* s'il existe un AAPD tel que  $L_{\text{état}}(M) = L$ .

3.7.6 **Théorème** Soit  $L$  un langage.

$L$  régulier  $\Rightarrow L$  non-contextuel déterministe  $\Rightarrow L$  non-contextuel.

3.7.7 **Théorème** Soit  $M$  un AAPD. Il existe une grammaire non-ambiguë  $G$  telle que  $L(G) = L(M)$ .

# Substitutions non-contextuelles

**3.8.1 Définition (Substitution)** Soit  $\Sigma, \Sigma'$  deux alphabets. Une *substitution* est une application  $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma'^*)$  qui associe à toute lettre de  $\Sigma$  un langage sur  $\Sigma'$ .

On étend  $\sigma$  au mots de  $\Sigma$  et au langages sur  $\Sigma$  de la façon suivante :

$$\sigma : \begin{array}{l} \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma'^*) \\ a_1 \cdots a_n \mapsto \sigma(a_1) \cdot \dots \cdot \sigma(a_n) \end{array}$$

$$\sigma : \begin{array}{l} \mathcal{P}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma'^*) \\ L \mapsto \bigcup_{w \in L} \sigma(w) \end{array}$$

**3.8.2 Théorème** Soit  $\Sigma, \Sigma'$  deux alphabets et  $L$  un langage non-contextuel sur  $\Sigma$ . Soit  $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma'^*)$  une *substitution*.

Si pour tout  $a \in \Sigma$ ,  $\sigma(a)$  est un langage non-contextuel. Alors  $\sigma(L)$  est un langage non-contextuel.

**3.8.3 Théorème (Propriétés de stabilité (1))** Soient  $A, B$  deux langages non-contextuels sur  $\Sigma$ . Alors :

1.  $A \cup B$  est non-contextuel.
2.  $AB$  est non-contextuel.
3.  $A^*$  est non-contextuel.

et, si  $C \subseteq \Sigma^*$  est un langage régulier :

4.  $A \cap C$  est non-contextuel.
5.  $A \setminus C$  est non-contextuel.

En revanche :

6.  $A \cap B$  n'est pas forcément non-contextuel.
7.  $\bar{A}$  n'est pas forcément non-contextuel.
8.  $A \setminus B$  n'est pas forcément non-contextuel.

Soit  $\Sigma, \Sigma'$  deux alphabets et  $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$  un homomorphisme de mots alors :

9. Si  $A \subset \Sigma^*$  est non-contextuel alors  $h(A)$  est non-contextuel.
10. Si  $B \subset \Sigma'^*$  est non-contextuel alors  $h^R(B)$  est non-contextuel.

# ... et pour les AAPD:

**3.8.4 Théorème (Propriétés de stabilité (2))** Soient  $A, B$  deux langages non-contextuels déterministes sur  $\Sigma$ . Alors :

1.  $\bar{A}$  est non-contextuel déterministe.

En revanche :

2.  $A^*$  n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
3.  $A \cup B$  n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
4.  $A \cap B$  n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
5.  $A \setminus B$  n'est pas forcément non-contextuel déterministe.



# Pour la culture ...

**3.8.5 Définition** Soit  $\text{Par}_n = \{ [ \overset{1}{\phantom{,}}, \overset{1}{\phantom{,}} ], \dots, [ \overset{n}{\phantom{,}}, \overset{n}{\phantom{,}} ] \}$  un alphabet qui contient  $n$  types de parenthèses. Le langage  $\text{Equil}_n$  sur  $\text{Par}_n$  est l'ensemble des mots dont les parenthèses sont bien équilibrées.  $\text{Equil}_n$  est généré par la grammaire suivante :

$$S \rightarrow [ \overset{1}{\phantom{,}} \overset{1}{\phantom{,}} ] \mid [ \overset{2}{\phantom{,}} \overset{2}{\phantom{,}} ] \mid \dots \mid [ \overset{n}{\phantom{,}} \overset{n}{\phantom{,}} ] \mid SS \mid \epsilon$$

## 3.8.6 Théorème (Chomsky-Schützenberger)

Soit  $L$  un langage non-contextuel sur  $\Sigma$ . Il existe un langage  $R$  régulier,  $n \geq 0$ , et un homomorphisme  $h : \text{Par}_n \rightarrow \Sigma$  tels que :

$$L = h(\text{Equil}_n \cap R)$$

# Hiérarchie de Chomsky ...

