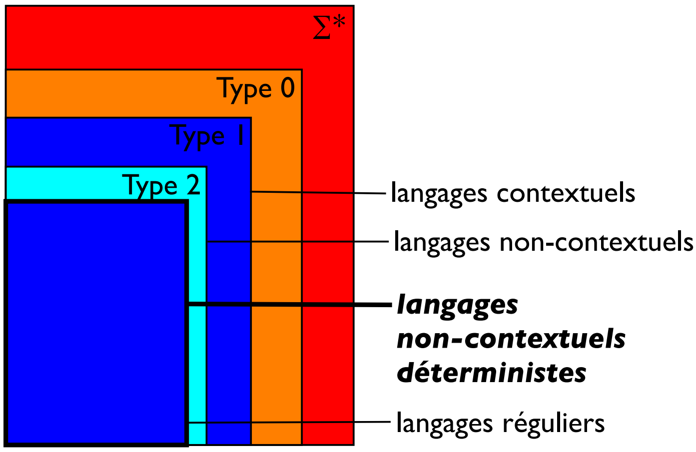
Informatique Théorique 3
2004/05

Semaine 10

Voir [HMU03] §6.4.
Voir [HMU03] §7.3, et [Koz97] §G.

Hiérarchie de Chomsky ...



AAPD

3.7.1 Définition (AAPD)
Un *automate à pile déterministe* (AAPD) est un automate à pile

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$$

qui satisfait, pour tout $q \in Q$, $a \in \Sigma$ et $X \in \Gamma$:

$$\boxed{\#(\Delta(q, a, X)) \;+\; \#(\Delta(q, \mathbf{e}, X)) \;\leq\; 1}$$

AAPD vs AFD (I)

3.7.2 Définition (Propriété préfixe) Soit L un langage. On dit que L satisfait la *propriété préfixe* si :

$$\boxed{\forall x, y \in L\,.\,(x \neq y \implies \neg\exists w \in \Sigma^*\,.\,(\,x = yw \vee y = xw\,))}$$

3.7.4 Théorème Soit L un langage. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un AAPD M tel que $\mathrm{L}_{\text{pile}}(M) = L$.
2. Il existe un AAPD M tel que $\mathrm{L}_{\text{état}}(M) = L$ et L satisfait la propriété préfixe.

3.7.3 Théorème

1. Si L est régulier, alors il existe un AAPD M tel que $\mathrm{L}_{\text{état}}(M) = L$.
2. Il existe L régulier tel que pour tout AAPD M : $\mathrm{L}_{\text{pile}}(M) \neq L$.

AAPD vs AFD (II)

3.7.5 Définition (Langage non-contextuel déterministe) Un langage L est di *non-contextuel déterministe* s'il existe un AAPD tel que $\mathrm{L}_{\text{état}}(M) = L$.

3.7.6 Théorème Soit L un langage.

L régulier $\Rightarrow$ L non-contextuel déterministe $\Rightarrow$ L non-contextuel.

3.7.7 Théorème Soit M un AAPD. Il existe une grammaire non-ambiguë G telle que $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(M)$.

Substitutions non-contextuelles

3.8.1 Définition (Substitution) Soit Σ, Σ' deux alphabets. Une *substitution* est une application $\sigma : \Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma'^*)$ qui associe à toute lettre de Σ un langage sur Σ'.

On étend σ au mots de Σ et au langages sur Σ de la façon suivante :

$$\sigma : \begin{array}{c} \Sigma^* \to \mathcal{P}(\Sigma'^*) \\ a_1 \cdots a_n \mapsto \sigma(a_1) \cdot \ldots \cdot \sigma(a_n) \end{array} \qquad \sigma : \begin{array}{c} \mathcal{P}(\Sigma) \to \mathcal{P}(\Sigma'^*) \\ L \mapsto \bigcup_{w \in L} \sigma(w) \end{array}$$

3.8.2 Théorème Soit Σ, Σ' deux alphabets et L un langage non-contextuel sur Σ. Soit $\sigma : \Sigma \to \mathcal{P}(\Sigma'^*)$ une *substitution*.

Si pour tout $a \in \Sigma$, $\sigma(a)$ est un langage non-contextuel. Alors $\sigma(L)$ est un langage non-contextuel.

3.8.3 Théorème (Propriétés de stabilité (1)) Soient A, B deux langages non-contextuels sur Σ. Alors :

1. $A \cup B$ est non-contextuel.
2. AB est non-contextuel.
3. A^* est non-contextuel.

et, si $C \subseteq \Sigma^*$ est un langage régulier :

4. $A \cap C$ est non-contextuel.
5. $A \setminus C$ est non-contextuel.

En revanche :

6. $A \cap B$ n'est pas forcément non-contextuel.
7. $\overline{A}$ n'est pas forcément non-contextuel.
8. $A \setminus B$ n'est pas forcément non-contextuel.

Soit Σ, Σ' deux alphabets et $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ un homomorphisme de mots alors :

9. Si $A \subset \Sigma^*$ est non-contextuel alors $h(A)$ est non-contextuel.
10. Si $B \subset \Sigma'^*$ est non-contextuel alors $h^R(B)$ est non-contextuel.

... et pour les AAPD:

3.8.4 Théorème (Propriétés de stabilité (2)) Soient A, B deux langages non-contextuels déterministes sur Σ. Alors :

1. $\overline{A}$ est non-contextuel déterministe.

En revanche :

2. A^* n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
3. $A \cup B$ n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
4. $A \cap B$ n'est pas forcément non-contextuel déterministe.
5. $A \setminus B$ n'est pas forcément non-contextuel déterministe.

Pour la culture ...

3.8.5 Définition Soit $\mathrm{Par}_n = \{\overset{1}{[},\overset{1}{]},\ldots,\overset{n}{[},\overset{n}{]}\}$ un alphabet qui contient n types de parenthèses. Le langage Equil_n sur Par_n est l'ensemble des mots dont les parenthèses sont bien équilibrées. Equil_n est généré par la grammaire suivante :

$$S \to \overset{1}{[}S\overset{1}{]} \mid \overset{2}{[}S\overset{2}{]} \mid \cdots \mid \overset{n}{[}S\overset{n}{]} \mid SS \mid \epsilon$$

3.8.6 Théorème (Chomsky-Schützenberger)
Soit L un langage non-contextuel sur Σ. Il existe un langage R régulier $n \geq 0$, et un homomorphisme $h : \mathrm{Par}_n \to \Sigma$ tels que :

$$L = h(\mathrm{Equil}_n \cap R)$$

Hiérarchie de Chomsky ...