

Informatique Théorique 3

2004/05

Semaine 5

Fermeture réflexive. Soit R une relation, la fermeture réflexive est la plus petite relation réflexive R' qui contient R .

Fermeture transitive. Soit R une relation, la fermeture transitive R^+ de R est la plus petite relation transitive qui contient R . La fermeture transitive et réflexive d'une relation R est notée R^* . \square

0.3.4 Lemme

1. Si R est symétrique alors $R = R^{-1}$.
2. Soit $R \subset A \times A$, la relation $R' \triangleq R \cup \{(a, a) \mid A \in A\}$ est la fermeture réflexive de R .
3. Soit $R \subset A \times A$, et la suite de relation R^i définie par induction de la manière suivante,

$$R^1 \triangleq R \qquad R^{i+1} \triangleq R R^i$$

alors l'ensemble $R^+ \triangleq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^i$ est la fermeture transitive de R . \square

2.3.3 Définition (e**-fermeture)** Soit un $\text{AFN}_{\mathbf{e}}$ $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$.

On définit l'**e**-fermeture $C_{\mathbf{e}}(q)$ d'un état $q \in Q$, comme étant le plus petit ensemble satisfaisant les règles :

$$\frac{}{q \in C_{\mathbf{e}}(q)} \qquad \frac{p \in C_{\mathbf{e}}(q) \quad p' \in \Delta(p, \mathbf{e})}{p' \in C_{\mathbf{e}}(q)}$$

L' **e**-fermeture d'un ensemble d'états est définie par :

$$C_{\mathbf{e}}(P) = \bigcup_{q \in P} C_{\mathbf{e}}(q)$$

Noter que $C_{\mathbf{e}}(q) \subseteq Q$ et $C_{\mathbf{e}}(P) \subseteq Q$. □

Intuitivement, l'**e**-fermeture d'un état q donne l'ensemble de tous les états atteignables par zéro, une, ou plusieurs **e**-transitions à partir de q .

Fermeture & stabilité

0.7.1 **Définition (Fermeture)** Soit (X, \sqsubseteq) un ordre. Une application $f : X \rightarrow X$ est une *fermeture* (sur X) si pour tout $x, y \in X$:

1. $x \sqsubseteq f(x)$ (* closure operator *)
2. si $x \sqsubseteq y$ alors $f(x) \sqsubseteq f(y)$
3. $f(f(x)) = f(x)$ (* $f(x)$ est un point fixe de f *)

Un élément x est un *point fixe* de f si $x = f(x)$. □

0.7.2 **Définition (Stabilité)** Soit $f : X^n \rightarrow X$ une application. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est *stable par f* si : (* closed under f *)

$$\forall y_1, \dots, y_n \in Y . f(y_1, \dots, y_n) \in Y$$

si $n=1$: $f(Y) \subseteq Y$

Question

Quelles sont les **propriétés de stabilité** de l'**ensemble des langages réguliers**?

opérations sur les langages réguliers

vs.

constructions et transformations des AF

Deux automates en parallèle ...

2.5.2 Lemme Soit $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ et $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ deux AFD. Posons,

$$\begin{aligned} Q_{1 \times 2} &\triangleq Q_1 \times Q_2 \\ \delta_{1 \times 2}((q_1, q_2), a) &\triangleq (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \\ s_{1 \times 2} &\triangleq (s_1, s_2) \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall x \in \Sigma^* \quad \widehat{\delta}_{1 \times 2}((p, q), x) = (\widehat{\delta}_1(p, x), \widehat{\delta}_2(q, x))$$

L'automate $M_{1 \otimes 2} \triangleq (Q_{1 \times 2}, \Sigma, \delta_{1 \times 2}, s_{1 \times 2}, F_1 \times F_2)$ reconnaît le langage $L(M_{1 \otimes 2}) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

L'automate $M_{1 \oplus 2} \triangleq (Q_{1 \times 2}, \Sigma, \delta_{1 \times 2}, s_{1 \times 2}, (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2))$ reconnaît le langage $L(M_{1 \oplus 2}) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

Régularité

2.5.1 Théorème (Rappel) Soit Σ un alphabet, L un langage sur Σ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L est régulier.
2. Il existe un AFD M tel que $L(M) = L$.
3. Il existe un AFN M tel que $L(M) = L$.
4. Il existe un AFN_e M tel que $L(M) = L$.
5. Il existe une expression régulière $x \in \mathbf{RE}_\Sigma$ telle que $L(x) = L$.
6. Il existe une grammaire G telle que $L(G) = L$
7. Il existe un AFNG M tel que $L(M)=L$
8. (... la prochaine semaine ...)

Stabilité

2.5.3 Théorème (Propriétés de stabilité (1))

Soit Σ un alphabet et $A, B \subseteq \Sigma^*$ des langages réguliers. Alors,

1. $A \cap B$ est régulier.

2. $A \cup B$ est régulier.

3. AB est régulier.

4. A^* est régulier.

5. \overline{A} est régulier.

6. $A \setminus B$ est régulier.

Pigeonhole principle

2.6.1 Remarque (Principe des tiroirs de Dirichlet) Si l'on range strictement plus de n chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

2.6.2 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD et $w \in L(M)$ tel que $|w| > \#(Q)$. On décompose w en $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ avec $n = |w|$ et $a_i \in \Sigma$.

Alors il existe $1 \leq i < j \leq n$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (a_1 \cdot \dots \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_j)^k \cdot (a_{j+1} \cdot \dots \cdot a_n) \in L(M)$$

Pumping Lemma

2.6.3 Lemme (Gonflement) Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ . Si L est régulier, alors $\mathbf{G}(L)$ est vrai avec

$$\mathbf{G}(L) \triangleq \exists n \in \mathbb{N} \forall w \in L : |w| \geq n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \exists x, y, z \in \Sigma^* : & w = xyz \\ & \wedge y \neq \epsilon \\ & \wedge |xy| \leq n \\ & \wedge \forall k \in \mathbb{N} : xy^kz \in L \end{aligned}$$

$g(w, L, n)$

“ w est (L, n) -gonflable”

2.6.4 Corollaire Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ . Si $\mathbf{G}(L)$ n'est pas satisfaite, alors L n'est pas régulier. \square

Homomorphisme de mots

2.5.4 Définition (Homomorphisme de mots) Une application $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ est un *homomorphisme de mots* si

$$\begin{aligned} h(\epsilon) &= \epsilon \\ \forall x, y \in \Sigma^* : h(x \cdot y) &= h(x) \cdot h(y) \end{aligned}$$

2.5.5 Lemme Un homomorphisme de mots $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ est entièrement défini par son image sur Σ , c'est à dire par la donnée d'une application $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'^*$.

0.4.3 Définition (Image d'un ensemble) Soit $f \in A \rightarrow B$.

Soit $X \subseteq A$, l'image directe de X par f est

$$\boxed{f(X)} \triangleq \{f(a) \mid a \in (X \cap \text{dom}(f))\}$$

Soit $Y \subseteq B$, l'image réciproque de Y par f est

$$\boxed{f^R(Y)} \triangleq \{a \in \text{dom}(f) \mid f(a) \in Y\}$$

Stabilité

2.5.6 Théorème (Propriétés de stabilité (2)) Soit Σ, Σ' deux alphabets et $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma'^*$ un homomorphisme de mots. alors

7. Si $B \subseteq \Sigma'^*$ est régulier, alors $h^{-1}(B)$ est aussi régulier.
8. Si $A \subseteq \Sigma^*$ est régulier, alors $h(A)$ est aussi régulier.

□

Notons pour $A \subseteq \Sigma^*$, $h(A)$ régulier n'implique pas toujours A régulier.