Informatique Théorique 3
2004/05

Semaine 5

Fermeture réflexive. Soit R une relation, la fermeture réflexive est la plus petite relation réflexive R' qui contient R.

Fermeture transitive. Soit R une relation, la fermeture transitive R^+ de R est la plus petite relation transitive qui contient R. La fermeture transitive et réflexive d'une relation R est notée R^*. □

0.3.4 Lemme

1. Si R est symétrique alors $R = R^{-1}$.
2. Soit $R \subset A \times A$, la relation $R' \triangleq R \cup \{(a, a) \mid A \in A\}$ est la fermeture réflexive de R.
3. Soit $R \subset A \times A$, et la suite de relation R^i définie par induction de la manière suivante,

$$R^1 \triangleq R \qquad R^{i+1} \triangleq R\,R^i$$

alors l'ensemble $R^+ \triangleq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R_i$ est la fermeture transitive de R. □

2.3.3 Définition (e-fermeture) Soit un AFN$_\mathbf{e}$ $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$.
On définit l'**e**-*fermeture* $\mathrm{C}_\mathbf{e}(q)$ d'un état $q \in Q$, comme étant le plus petit ensemble satisfaisant les règles :

$$\frac{}{q \in \mathrm{C}_\mathbf{e}(q)} \qquad\qquad \frac{p \in \mathrm{C}_\mathbf{e}(q) \qquad p' \in \Delta(p, \mathbf{e})}{p' \in \mathrm{C}_\mathbf{e}(q)}$$

L' **e**-fermeture d'un ensemble d'états est définie par :

$$\mathrm{C}_\mathbf{e}(P) = \bigcup_{q \in P} \mathrm{C}_\mathbf{e}(q)$$

Noter que $\mathrm{C}_\mathbf{e}(q) \subseteq Q$ et $\mathrm{C}_\mathbf{e}(P) \subseteq Q$. □

Intuitivement, l'**e**-fermeture d'un état q donne l'ensemble de tous les états atteignables par zéro, une, ou plusieurs **e**-transitions à partir de q.

Fermeture & stabilité

0.7.1 Définition (Fermeture) Soit $(X, \sqsubseteq)$ un ordre. Une application $f : X \to X$ est une *fermeture* (sur X) si pour tout $x, y \in X$:

1. $x \sqsubseteq f(x)$ (* closure operator *)
2. si $x \sqsubseteq y$ alors $f(x) \sqsubseteq f(y)$
3. $f(f(x)) = f(x)$ (* f(x) est un point fixe de f *)

Un élément x est un *point fixe de* f si $x = f(x)$. □

0.7.2 Définition (Stabilité) Soit $f : X^n \to X$ une application. Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est *stable par* f si : (* closed under f *)

$$\forall y_1 \ldots, y_n \in Y \,.\, f(y_1 \ldots, y_n) \in Y$$

si n=1: f(Y) in Y

Question

Quelles sont les ***propriétés de stabilité*** de l'***ensemble des langages réguliers***?

opérations sur les langages réguliers
vs.
constructions et transformations des AF

Deux automates en parallel ...

2.5.2 Lemme Soit $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ et $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ deux AFD. Posons,

$$\boxed{\begin{gathered} Q_{1\times 2} \triangleq Q_1 \times Q_2 \\ \delta_{1\times 2}((q_1, q_2), a) \triangleq (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \\ s_{1\times 2} \triangleq (s_1, s_2) \end{gathered}}$$

Alors :

$$\forall x \in \Sigma^* \quad \boxed{\widehat{\delta_{1\times 2}}((p, q), x) = (\widehat{\delta}_1(p, x), \widehat{\delta}_2(q, x))}$$

L'automate $M_{1\otimes 2} \triangleq (Q_{1\times 2}, \Sigma, \delta_{1\times 2}, s_{1\times 2}, \boxed{F_1 \times F_2})$ reconnaît le langage $\boxed{L(M_{1\otimes 2}) = L(M_1) \cap L(M_2)}$.

L'automate $M_{1\oplus 2} \triangleq (Q_{1\times 2}, \Sigma, \delta_{1\times 2}, s_{1\times 2}, \boxed{(F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)})$ reconnaît le langage $\boxed{L(M_{1\oplus 2}) = L(M_1) \cup L(M_2).}$

Régularité

2.5.1 Théorème (Rappel) Soit Σ un alphabet, L un langage sur Σ. Les proposition suivantes sont équivalentes :

1. L est régulier.
2. Il existe un AFD M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
3. Il existe un AFN M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
4. Il existe un AFN$_\mathbf{e}$ M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
5. Il existe une expression régulière $\mathbf{x} \in \mathbf{RE}_\Sigma$ telle que $\mathrm{L}(\mathbf{x}) = L$.

6. Il existe une grammaire G telle que L(G) = L
7. Il existe un AFNG M tel que L(M)=L
8. (... la prochaine semaine ...)

Stabilité

2.5.3 Théorème (Propriétés de stabilité (1))
Soit Σ un alphabet et $A, B \subseteq \Sigma^*$ des langages réguliers. Alors,

1. $A \cap B$ est régulier.
2. $A \cup B$ est régulier.
3. AB est régulier.
4. A^* est régulier.
5. $\overline{A}$ est régulier.
6. $A \setminus B$ est régulier.

Pigeonhole principle

2.6.1 Remarque (Principe des tiroirs de Dirichlet) Si l'on range strictement plus de n chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

2.6.2 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD et $w \in \mathrm{L}(M)$ tel que $|w| > \#(Q)$. On décompose w en $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ avec $n = |w|$ et $a_i \in \Sigma$.
Alors il existe $1 \leq i < j \leq n$ tel que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}}\ (a_1 \cdot \ldots \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_j)^{\boxed{k}} \cdot (a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \in \mathrm{L}(M)$$

Pumping Lemma

2.6.3 Lemme (Gonflement) Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si L est régulier, alors $\mathbf{G}(L)$ est vrai avec

$$\mathbf{G}(L) \triangleq \exists n \in \mathbb{N}\ \boxed{\forall w \in L : |w| \geq n} \Rightarrow \underbrace{\left(\boxed{\begin{array}{l} \exists x, y, z \in \Sigma^* : \quad w = xyz \\ \qquad\qquad \wedge\, y \neq \epsilon \\ \qquad\qquad \wedge\, |xy| \leq n \\ \qquad\qquad \wedge\, \forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L \end{array}} \right)}_{g(w,L,n)}$$

"w est (L,n)-gonflable"

2.6.4 Corollaire Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si $\mathbf{G}(L)$ n'est pas satisfaite, alors L n'est pas régulier. $\square$

Homomorphisme de mots

2.5.4 Définition (Homomorphisme de mots) Une application $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ est un *homomorphisme de mots* si

$$\boxed{\begin{array}{c} h(\epsilon) = \epsilon \\ \forall x, y \in \Sigma^* : h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y) \end{array}}$$

2.5.5 Lemme Un homomorphisme de mots $h : \boxed{\Sigma^* \to \Sigma'^*}$ est entièrement défini par son image sur Σ, c'est à dire par la donnée d'une application $f : \boxed{\Sigma \to \Sigma'^*}$

0.4.3 Définition (Image d'un ensemble) Soit $f \in A \rightharpoonup B$.

Soit $X \subseteq A$, *l'image directe* de X par f est

$$\boxed{f(X)} \triangleq \{f(a) \mid a \in (X \cap \mathrm{dom}(f))\}$$

Soit $Y \subseteq B$, *l'image réciproque* de Y par f est

$$\boxed{f^R(Y)} \triangleq \{a \in \mathrm{dom}(f) \mid f(a) \in Y\}$$

Stabilité

2.5.6 Théorème (Propriétés de stabilité (2)) Soit Σ, Σ' deux alphabets et $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ un homomorphisme de mots. alors

7. Si $B \subseteq \Sigma'^*$ est régulier, alors $\boxed{h^{R}(B)}$ est aussi régulier.
8. Si $A \subseteq \Sigma^*$ est régulier, alors $\boxed{h(A)}$ est aussi régulier.

$\square$

Notons pour $A \subseteq \Sigma^*$, $h(A)$ régulier n'implique pas toujours $\boxed{A}$ régulier.