Informatique Théorique 3
2004/05

Semaine 3

AFN

2.2.1 Définition (AFN)

Un automate fini non déterministe (AFN) est un quintuplet

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$$

où

- Q est un ensemble fini d'*états*,
- Σ est un ensemble fini de symboles, *l'alphabet (d'entrée)*,
- $\boxed{\Delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)}$ est la *fonction (totale) de transition*,
- $s \in Q$ est l'*état initial* (ou de *départ*),
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des *états accepteurs* (ou *finaux*).

(Se souvenir de l'exércice 2 de Série 1)

Langage d'un AFN

2.2.2 Définition (Fonction de transition sur les mots) Étant donné un AFN $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ on étend la fonction de transition Δ en une fonction de transition $\widehat{\Delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ sur les mots définie par :

$$\widehat{\Delta}(p, \epsilon) \triangleq \{\, p \,\} \qquad \widehat{\Delta}(q, wa) \triangleq \boxed{\bigcup_{p \in \boxed{\widehat{\Delta}(q,w)}}} \Delta(p, a)$$

2.2.3 Définition (Langage accepté par un AFN)
Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN.

1. M *accepte* le mot $w \in \Sigma^*$ si $\boxed{\widehat{\Delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset.}$
   Dans le cas contraire on dit que M *rejette* w.
2. Le *langage accepté par M* est défini par :

$$\mathrm{L}(M) \triangleq \{\, w \in \Sigma^* \mid \widehat{\Delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset \,\}$$

Conversion de AFN en AFD

2.2.4 Définition (Conversion d'un AFN en AFD) On définit la fonction D de *déterminisation* des AFN de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}: & \mathrm{AFN} \to \mathrm{AFD} & \\ & (Q, \Sigma, \Delta, s, F) \mapsto (Q_{\mathrm{D}}, \Sigma, \delta, s_{\mathrm{D}}, F_{\mathrm{D}}) & \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} Q_{\mathrm{D}} & \triangleq & \boxed{\mathcal{P}(Q)} \\ \delta(P, a) & \triangleq & \bigcup_{q \in P} \Delta(q, a) \\ s_{\mathrm{D}} & \triangleq & \{\, s \,\} \\ F_{\mathrm{D}} & \triangleq & \{\, P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset \,\} \end{array}$$

2.2.5 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN et $\mathrm{D}(M) = (\ldots, \delta, \ldots)$ son AFD associé. Alors, on a $\boxed{\forall w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(\{s\}, w) = \widehat{\Delta}(s, w)}$.

2.2.6 Théorème Soit M un AFN, on a $\boxed{\mathrm{L}(M) = \mathrm{L}(\mathrm{D}(M))}$.

AFN avec transitions instantanées

2.3.2 Définition (AFN$_{\mathbf{e}}$) Un *automate fini non déterministe avec transitions instantanées* (AFN$_{\mathbf{e}}$) est un quintuplet

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$$

où

- Q est un ensemble fini d'*états*,
- Σ est un ensemble fini de symboles, *l'alphabet (d'entrée)*,
- $\Delta : \boxed{Q \times (\Sigma \cup \{\mathbf{e}\}) \to \mathcal{P}(Q)}$ est la *fonction (totale) de transition*,
- $s \in Q$ est l'*état initial* (ou de *départ*),
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des *états accepteurs* (ou *finaux*).

e-fermeture

2.3.3 Définition (e-fermeture) Soit un AFN$_{\mathbf{e}}$ $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$.
On définit l'**e**-*fermeture* $\boxed{\mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q)}$ d'un état $q \in Q$, comme étant le plus petit ensemble satisfaisant les règles :

$$\frac{}{q \in \mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q)} \qquad\qquad \frac{p \in \mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q) \qquad \boxed{p' \in \Delta(p, \mathbf{e})}}{p' \in \mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q)}$$

L' **e**-fermeture d'un ensemble d'états est définie par :

$$\mathrm{C}_{\mathbf{e}}(P) = \bigcup_{q \in P} \mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q)$$

Noter que $\mathrm{C}_{\mathbf{e}}(q) \subseteq Q$ et $\mathrm{C}_{\mathbf{e}}(P) \subseteq Q$. □

Intuitivement, l'**e**-fermeture d'un état q donne l'ensemble de tous les états atteignables par zéro, une, ou plusieurs **e**-transitions à partir de q.

Langage d'un AFNe

2.3.4 Définition (Fonction de transition sur les mots) Étant donné un AFN$_\mathbf{e}$ $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ on étend la fonction de transition Δ en une fonction de transition $\boxed{\widehat{\Delta}_\mathbf{e} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)}$ sur les mots définie par :

$$\widehat{\Delta}_\mathbf{e}(q, \epsilon) \triangleq \boxed{\mathrm{C}_\mathbf{e}}(q) \qquad \widehat{\Delta}_\mathbf{e}(q, xa) \triangleq \bigcup_{p \in \widehat{\Delta}_\mathbf{e}(q,x)} \boxed{\mathrm{C}_\mathbf{e}}(\Delta(p, a))$$

2.3.5 Définition (Langage accepté par un AFN$_\mathbf{e}$)
Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN$_\mathbf{e}$.

1. L'automate M *accepte* le mot $w \in \Sigma^*$ si $\widehat{\Delta}_\mathbf{e}(s, w) \cap F \neq \emptyset$. Dans le cas contraire on dit que M *rejette* w.
2. Le *langage accepté par* M est défini par :

$$\boxed{\mathrm{L}_\mathbf{e}(M)} \triangleq \{\, w \in \Sigma^* \mid \widehat{\Delta}_\mathbf{e}(s, w) \cap F \neq \emptyset \,\}$$

Conversion de AFNe en AFD

2.3.8 Définition (Conversion de AFN$_{\mathbf{e}}$ en AFD) La fonction $\mathrm{D}_{\mathbf{e}}$ d'*élimination des* $\mathbf{e}$*-transitions et de déterminisation* est définie par :

$$\begin{array}{rl}\mathrm{D}_{\mathbf{e}}: & \mathrm{AFN}_{\mathbf{e}} \to \mathrm{AFD} \\ & (Q, \Sigma, \Delta, s, F) \mapsto (Q_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}}, \Sigma, \delta, s_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}}, F_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}})\end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl}Q_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}} & \triangleq & \mathcal{P}(Q) \\ \delta(P, a) & \triangleq & \bigcup_{q \in P} \boxed{\mathrm{C}_{\mathbf{e}}}(\Delta(q, a)) \\ s_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}} & \triangleq & \boxed{\mathrm{C}_{\mathbf{e}}}(s) \\ F_{\mathrm{D}_{\mathbf{e}}} & \triangleq & \{ P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset \}\end{array}$$

2.3.9 Théorème Soit M un AFN$_{\mathbf{e}}$, on a $\boxed{\mathrm{L}_{\mathbf{e}}(M) = \mathrm{L}(\mathrm{D}_{\mathbf{e}}(M))}$.