

2.2.1 Définition (AFN)

Un automate fini non déterministe (AFN) est un quintuplet

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$$

où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un ensemble fini de symboles, l'alphabet (d'entrée),
- $\Delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ est la fonction (totale) de transition,
- $s \in Q$ est l'état initial (ou de départ),
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états accepteurs (ou finaux).

(Se souvenir de l'exercice 2 de Série 1)

Langage d'un AFN

2.2.2 Définition (Fonction de transition sur les mots) Étant donné un AFN $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ on étend la fonction de transition Δ en une fonction de transition $\hat{\Delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ sur les mots définie par :

$$\hat{\Delta}(p, \epsilon) \triangleq \{p\} \quad \hat{\Delta}(q, wa) \triangleq \bigcup_{p \in \Delta(q, w)} \Delta(p, a)$$

2.2.3 Définition (Langage accepté par un AFN)

Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN.

1. M accepte le mot $w \in \Sigma^*$ si $\hat{\Delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset$.
Dans le cas contraire on dit que M rejette w .
2. Le langage accepté par M est défini par :

$$L(M) \triangleq \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\Delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Conversion de AFN en AFD

2.2.4 Définition (Conversion d'un AFN en AFD) On définit la fonction D de détermination des AFN de la manière suivante :

$$D : \text{AFN} \rightarrow \text{AFD} \\ (Q, \Sigma, \Delta, s, F) \mapsto (Q_D, \Sigma, \delta, s_D, F_D)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_D &\triangleq \mathcal{P}(Q) \\ \delta(P, a) &\triangleq \bigcup_{q \in P} \Delta(q, a) \\ s_D &\triangleq \{s\} \\ F_D &\triangleq \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

2.2.5 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN et $D(M) = (\dots, \delta, \dots)$ son AFD associé. Alors, on a $\forall w \in \Sigma^* : \delta(\{s\}, w) = \hat{\Delta}(s, w)$.

2.2.6 Théorème Soit M un AFN, on a $L(M) = L(D(M))$.

AFN avec transitions instantanées

e-fermeture

2.3.2 Définition (AFN_e) Un automate fini non déterministe avec transitions instantanées (AFN_e) est un quintuplet

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$$

où

- Q est un ensemble fini d'états,
- Σ est un ensemble fini de symboles, l'alphabet (d'entrée),
- $\Delta : Q \times \Sigma \cup \{\epsilon\} \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ est la fonction (totale) de transition,
- $s \in Q$ est l'état initial (ou de départ),
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états accepteurs (ou finaux).

2.3.3 Définition (e-fermeture) Soit un AFN_e $(Q, \Sigma, \Delta, s, F)$.

On définit l'e-fermeture $C_e(q)$ d'un état $q \in Q$, comme étant le plus petit ensemble satisfaisant les règles :

$$\frac{}{q \in C_e(q)} \quad \frac{p \in C_e(q) \quad p' \in \Delta(p, \epsilon)}{p' \in C_e(q)}$$

L' e-fermeture d'un ensemble d'états est définie par :

$$C_e(P) = \bigcup_{q \in P} C_e(q)$$

Noter que $C_e(q) \subseteq Q$ et $C_e(P) \subseteq Q$. □

Intuitivement, l'e-fermeture d'un état q donne l'ensemble de tous les états atteignables par zéro, une, ou plusieurs e-transitions à partir de q .

Langage d'un AFNe

2.3.4 Définition (Fonction de transition sur les mots) Étant donné un AFN_e $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ on étend la fonction de transition Δ en une fonction de transition $\hat{\Delta}_e : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ sur les mots définie par :

$$\hat{\Delta}_e(q, \epsilon) \triangleq C_e(q) \quad \hat{\Delta}_e(q, xa) \triangleq \bigcup_{p \in \hat{\Delta}_e(q, x)} C_e(\Delta(p, a))$$

2.3.5 Définition (Langage accepté par un AFN_e)

Soit $M = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$ un AFN_e.

1. L'automate M accepte le mot $w \in \Sigma^*$ si $\hat{\Delta}_e(s, w) \cap F \neq \emptyset$. Dans le cas contraire on dit que M rejette w .
2. Le langage accepté par M est défini par :

$$L_e(M) \triangleq \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\Delta}_e(s, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Conversion de AFNe en AFD

2.3.8 Définition (Conversion de AFN_e en AFD) La fonction D_e d'élimination des e-transitions et de détermination est définie par :

$$D_e : \text{AFN}_e \rightarrow \text{AFD} \\ (Q, \Sigma, \Delta, s, F) \mapsto (Q_{D_e}, \Sigma, \delta, s_{D_e}, F_{D_e})$$

avec :

$$Q_{D_e} \triangleq \mathcal{P}(Q) \\ \delta(P, a) \triangleq \bigcup_{q \in P} C_e(\Delta(q, a)) \\ s_{D_e} \triangleq C_e(s) \\ F_{D_e} \triangleq \{P \subseteq Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$$

2.3.9 Théorème Soit M un AFN_e, on a $L_e(M) = L(D_e(M))$