Informatique théorique
Examen de test

Nom: $\square$ Matricule: $\square\square\square\square\square\square\square$

Note: $\square + \square + \square = \square \approx \boxed{\square}$

22 décembre 2004

Début de l'examen	13h15
Fin de l'examen	16h00
Examen rendu à	$\square$h$\square$

Modalités

- L'examen consiste en 3 parties donnant ensemble droit à 100 points au maximum.
- 50 points correspondent à une note (ne comptant pas pour l'examen final) de 4.
- Les seules aides admises à l'examen sont les notes du cours (sans annotations).
- Résolvez chaque partie sur une feuille différente.
- Notez votre nom et prénom sur chaque feuille rendue.
- Une attention particulière sera prêtée à la qualité de votre rédaction.
- Vos solutions seront corrigées et vous seront rendues avec un corrigé exemplaire.

Partie 1 (Définition mathématique de langages formels)**.**

Réponse	*1 compréhension ensembliste, 1 système déductif, 1 grammaire génératrice, 1 expression régulière, 1 démonstration*
Temps conseillé	*90 minutes*
Note maximale	*50 points*
Note obtenue	$\square$
Astuces	*les propriétés de l'égalité d'ensembles* *les définitions des opérations sur les langages*

Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ *et* L *le langage des mots qui contiennent un nombre pair d'occurrences de 1.*

Pour le langage L,

1. *donnez 4 définitions mathématiques* (L_1, L_2, L_3, L_4) *sous forme*

   L_1 : *d'une* compréhension *(expression ensembliste)*

   L_2 : *d'*axiomes *et de* règles *(système déductif)*

   L_3 : *de* productions *(grammaire génératrice)*

   L_4 : *d'une* expression régulière *(filtrage par motifs)*

   Piste :
   - *exploitez l'ordre des tâches suggéré*
   - *définissez un symbole relationnel unaire* $\#_1(\ldots)$ `est pair` *(prononcé* le nombre d'occurrences de 1 dans … est pair*) en complétant la* définition inductive *suivante :*

   $$\#_1(\epsilon)\ \texttt{est pair} \quad \textit{ssi} \quad \top$$

   $$\#_1(\square)\ \texttt{est pair} \quad \textit{ssi} \quad \begin{cases} \square & \textit{si } \square, \textit{ et} \\ \square & \textit{sinon.} \end{cases}$$

   où $\top$ *désigne la proposition vraie par excellence*
   - *donnez une* définition mutuellement inductive *de* L_2 *et son complément en complétant la définition suivante :*

   $$\frac{}{\epsilon \in \square} \qquad \frac{}{\square \in L_2}\ \square \in \overline{L_2} \qquad \frac{\square \in L_2}{\square \in L_2}\ \square$$

   $$\frac{}{\square \in \overline{L_2}}\ \square \in L_2 \qquad \frac{\square \in \overline{L_2}}{a \cdot w \in \overline{L_2}}\ a \in \square$$

2. *montrez que $L_1 = L_2 = L_3 = L_4$ en démontrant que $L_1 = L_2$ et que $L_4 = L_1$ et en donnant un argument pour que $L_2 = L_3$*

Piste :
- *démontrez $L_1 = L_2$ avec une* preuve inductive *suivant la proposition*

$$\forall (w \in \Sigma^*) \begin{pmatrix} (\#_1(w) \texttt{ est pair } \Leftrightarrow \ w \in L_2) \land \\ (\neg(\#_1(w) \texttt{ est pair}) \ \Leftrightarrow \ w \in \overline{L_2}) \end{pmatrix}$$

- *un* axiome $\dfrac{}{a \cdot w \in L}\ a \in \Sigma' \subseteq \Sigma \land w \in L'$ *<u>est équivalent à</u> une production de la forme* $S_L \to a \cdot A_{L'}$, *où S_L est le non-terminal (initial) associé à L et $A_{L'}$ est le non-terminal associé à L'*
- *une* règle $\dfrac{w \in L}{a \cdot w \in L}\ a \in \Sigma' \subseteq \Sigma$ *<u>est équivalente à</u> une production de la forme* $S_L \to a \cdot S_L$

Partie 2 (Analyse mathématique de langages formels)**.**

Réponse	*1 démonstration*
Temps conseillé	*45 minutes*
Note maximale	*30 points*
Note obtenue	

Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, le complément d'une lettre *de cet alphabet $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$, et le* complément d'un mot *sur cet alphabet $\overline{\epsilon} = \epsilon$ et $\overline{a \cdot w} = \overline{a} \cdot \overline{w}$.*

Démontrez que le langage $L = \{\ w\overline{w} \mid w, \overline{w} \in \Sigma^*\ \}$ n'est pas *régulier avec*
- *soit le corollaire du lemme de gonflement pour les langages réguliers*
- *soit le théorème de Myhill-Nerode*
- *soit des propriétés de stabilité*

Partie 3 (Reconnaissance automatique de langages formels)**.**

Réponse	*1 AFD minimal, 1 expression régulière, 1 démonstration*
Temps conseillé	*30 minutes*
Note maximale	*20 points*
Note obtenue	
Astuces	*la règle d'Arden, les lois de l'algèbre de Kleene*

Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ et L le langage des mots qui contiennent un nombre pairs d'occurrences de 1.

Pour le langage L,

1. *construisez un automate fini déterministe minimal A et justifiez pourquoi A est minimal*
2. *dérivez de A l'expression régulière E correspondante*
3. *montrez que E est équivalente à l'expression régulière trouvée dans la partie 1.*