Informatique théorique
Corrigé de l'examen intermédiaire
(Une application de la logique élémentaire)

Simon Kramer

Semestre d'hiver 2004/2005

Partie 1 La définition inductive du symbole relationnel unaire $\#_1(\ldots)\ \mathtt{est\ pair}$ (prononcé *le nombre d'occurrences de 1 dans ... est pair*) :

$$\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair} \quad \text{ssi} \quad \top$$
$$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} \neg\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair} & \text{si } a = 1, \text{ et} \\ \#_1(w)\ \mathtt{est\ pair} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\top$ désigne la proposition vraie par excellence.

Les 4 définitions mathématiques (L_1, L_2, L_3, L_4) :

1. $L_1 = \{\ w \in \Sigma^* \mid \#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}\ \}$
2. L_2 est le plus petit ensemble selon le système déductif suivant :

$$\frac{}{\epsilon \in L_2} \qquad \frac{}{1 \cdot w \in L_2}\ w \in \overline{L_2} \qquad \frac{w \in L_2}{a \cdot w \in L_2}\ a \in \{0, 2\}$$

$$\frac{}{1 \cdot w \in \overline{L_2}}\ w \in L_2 \qquad \frac{w \in \overline{L_2}}{a \cdot w \in \overline{L_2}}\ a \in \{0, 2\}$$

3. L_3 est l'ensemble généré par les productions suivantes (grammaire génératrice *linéaire à droite*) :

$$S \longrightarrow \epsilon \mid 0 \cdot S \mid 2 \cdot S \mid 1 \cdot A$$
$$A \longrightarrow 1 \cdot S \mid 0 \cdot A \mid 2 \cdot A$$

4. $L_4 = \mathrm{L}((0 + 2 + 1(0 + 2)^*1)^*)$

La démonstration :

$L_1 = L_2$ (par induction structurelle) :

1	$\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair}$	déf $\#_1$
2	$\epsilon \in L_2$	déf L_2
3	$\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair} \wedge \epsilon \in L_2$	1, 2
4	$\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair} \Leftrightarrow \epsilon \in L_2$	3
5	$\neg\neg(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair})$	1
6	$\neg(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair}) \Rightarrow \epsilon \in \overline{L_2}$	5, le faux implique tout
7	$\epsilon \notin \overline{L_2}$	$\epsilon \in \overline{L_2}$ n'est pas déductible
8	$\epsilon \in \overline{L_2} \Rightarrow \neg(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair})$	7, le faux implique tout
9	$\neg(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair}) \Leftrightarrow \epsilon \in \overline{L_2}$	6, 8
10	$(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair} \Leftrightarrow \epsilon \in L_2) \wedge$ $(\neg(\#_1(\epsilon)\ \mathtt{est\ pair}) \Leftrightarrow \epsilon \in \overline{L_2})$	4, 9. (cas de base)

11	$(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair} \Leftrightarrow w \in L_2) \wedge$ $(\neg(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}) \Leftrightarrow w \in \overline{L_2})$	hyp. d'induction
12	$a \in \Sigma$	hyp
13	$a = 1 \vee a \neq 1$	tautologie
14	$a = 1$	hyp
15	$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}$	hyp
16	$\neg(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair})$	14, 15, déf $\#_1$
17	$w \in \overline{L_2}$	11, 16
18	$1 \cdot w \in L_2$	17, déf L_2
19	$a \cdot w \in L_2$	14, 18
20	$a \cdot w \in L_2$	hyp
21	$1 \cdot w \in L_2$	14, 20
22	$w \in \overline{L_2}$	21, déf L_2[a]
23	$\neg(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair})$	11, 22
24	$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}$	14, 23, déf $\#_1$
25	$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2$	15–19, 20–24
26	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair})$	hyp
27	$\neg\neg(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair})$	14, 26, déf $\#_1$
28	$\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}$	27
29	$w \in L_2$	11, 28
30	$1 \cdot w \in \overline{L_2}$	29, déf $\overline{L_2}$
31	$a \cdot w \in \overline{L_2}$	14, 30
32	$a \cdot w \in \overline{L_2}$	hyp
33	$1 \cdot w \in \overline{L_2}$	14, 32
34	$w \in L_2$	33, déf $\overline{L_2}$[b]
35	$\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}$	11, 34
36	$\neg\neg(\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair})$	35
37	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair})$	14, 36, déf $\#_1$
38	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2}$	26–31, 32–37
39	$(\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2) \wedge$ $(\neg(\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2})$	25, 38
40	$a \neq 1$	hyp
41	$a \in \{0, 2\}$	12, 40
42	$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}$	hyp
43	$\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}$	41, 42, déf $\#_1$
44	$w \in L_2$	11, 43
45	$a \cdot w \in L_2$	41, 44, déf L_2
46	$a \cdot w \in L_2$	hyp
47	$w \in L_2$	41, 46, déf L_2[c]
48	$\#_1(w)\ \mathtt{est\ pair}$	11, 47
49	$\#_1(a \cdot w)\ \mathtt{est\ pair}$	41, 48, déf $\#_1$

[a] il s'agit ici d'une application *inverse* d'un axiome avec condition d'application au sens suivant : l'axiome en question étant $\frac{}{1 \cdot w \in L_2}\ w \in \overline{L_2}$, et ayant déduit $1 \cdot w \in L_2$ (la conclusion de l'axiome) à la ligne 21, on en déduit « inversement » $w \in \overline{L_2}$ (la condition d'application l'axiome). Cette déduction « inverse » est admissible exactement parce que l'axiome en question est la *seule* règle de déduction avec cette conclusion. C'est-à-dire, il n'y a pas d'autres règles de déduction à travers lesquelles on aurait pu déduire $1 \cdot w \in L_2$. On a donc « forcément » $w \in \overline{L_2}$.

[b] application inverse d'un axiome avec condition d'application

[c] application inverse d'une règle de déduction avec condition d'application

50	$\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2$	42–45, 46–49
51	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair})$	hyp
52	$\neg(\#_1(w)\ \texttt{est pair})$	41, 51, déf $\#_1$
53	$w \in \overline{L_2}$	11, 52
54	$a \cdot w \in \overline{L_2}$	41, 53, déf $\overline{L_2}$
55	$a \cdot w \in \overline{L_2}$	hyp
56	$w \in \overline{L_2}$	41, 55, déf $\overline{L_2}$[a]
57	$\neg(\#_1(w)\ \texttt{est pair})$	11, 56
58	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair})$	41, 57, déf $\#_1$
59	$\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2}$	51–54, 55–58
60	$(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2) \wedge$ $(\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2})$	50, 59
61	$(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2) \wedge$ $(\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2})$	13, 14–39, 40–60
62	$\forall(a \in \Sigma) \begin{pmatrix} (\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow a \cdot w \in L_2) \wedge \\ (\neg(\#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair}) \Leftrightarrow a \cdot w \in \overline{L_2}) \end{pmatrix}$	12–61
63	$\forall(w \in \Sigma^*) \begin{pmatrix} (\#_1(w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow w \in L_2) \wedge \\ (\neg(\#_1(w)\ \texttt{est pair}) \Leftrightarrow w \in \overline{L_2}) \end{pmatrix}$	10, 11–62
64	$\forall(w \in \Sigma^*)(\#_1(w)\ \texttt{est pair} \Leftrightarrow w \in L_2)$	63
65	$\forall(w \in \Sigma^*)(w \in L_1 \Leftrightarrow w \in L_2)$	64, déf L_1
66	$w \notin \Sigma^*$	hyp
67	$w \notin L_1$	66, déf L_1
68	$w \notin L_2$	66, déf L_2
69	$w \notin L_1 \wedge w \notin L_2$	67, 68
70	$w \notin L_1 \Leftrightarrow w \notin L_2$	69
71	$\forall(w \notin \Sigma^*)(w \in L_1 \Leftrightarrow w \in L_2)$	66–70
72	$\forall w(w \in L_1 \Leftrightarrow w \in L_2)$	65, 71
73	$L_1 = L_2$	72

[a] application inverse d'une règle de déduction avec condition d'application

$L_4 = L_1$ par induction structurelle

1	$L_4 = \mathrm{L}((0+2+1(0+2)^*1)^*)$	déf L_4
	$= \mathrm{L}(0+2+1(0+2)^*1)^*$	déf L
	$= (\mathrm{L}(0) \cup \mathrm{L}(2) \cup \mathrm{L}(1(0+2)^*1))^*$	déf L
	$= (\{0\} \cup \{2\} \cup \mathrm{L}(1)\mathrm{L}((0+2)^*)\mathrm{L}(1))^*$	déf L
	$= (\{0,2\} \cup \{1\}\mathrm{L}(0+2)^*\{1\})^*$	déf L
	$= (\{0,2\} \cup \{1\}(\mathrm{L}(0) \cup \mathrm{L}(2))^*\{1\})^*$	déf L
	$= (\{0,2\} \cup \{1\}(\{0\} \cup \{2\})^*\{1\})^*$	déf L
	$= (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^*$	
	$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^n$	déf *
2	$\epsilon \in \{\epsilon\} = (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^0$	déf puissance
3	$\epsilon \in L_4$	1, 2
4	$\epsilon \in L_1$	déf L_1
5	$\epsilon \in L_4 \wedge \epsilon \in L_1$	3, 4
6	$\epsilon \in L_4 \Leftrightarrow \epsilon \in L_1$	5. (cas de base)
7	$w \in L_4 \Leftrightarrow w \in L_1$	hyp. d'induction
8	$w \notin L_4 \Leftrightarrow w \notin L_1$	7
9	$a \cdot w \in L_4$	
	$\Leftrightarrow a \cdot w \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^n$	1
	$\Leftrightarrow \exists(n \in \mathbb{N})(a \cdot w \in (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^n)$	
	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a = 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(a \cdot w \in (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^n) \vee \\ (a \neq 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(a \cdot w \in (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^n) \end{pmatrix}$	
	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a = 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(a \cdot w \in \{1\}\{0,2\}^*\{1\}(\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^{n-1}) \vee \\ (a \neq 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(a \cdot w \in \{0,2\}(\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^{n-1}) \end{pmatrix}$	
	$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (a = 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(w \in \{0,2\}^*\{1\}(\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^{n-1}) \vee \\ (a \neq 1 \wedge \exists(n \in \mathbb{N})(w \in (\{0,2\} \cup \{1\}\{0,2\}^*\{1\})^{n-1}) \end{pmatrix}$	
	$\Leftrightarrow ((a = 1 \wedge w \notin L_4) \vee (a \neq 1 \wedge w \in L_4))$	déf L_4
	$\Leftrightarrow ((a = 1 \wedge w \notin L_1) \vee (a \neq 1 \wedge w \in L_1))$	7, 8
	$\Leftrightarrow ((a = 1 \wedge \neg(\#_1(w)\ \texttt{est pair})) \vee (a \neq 1 \wedge \#_1(w)\ \texttt{est pair}))$	déf L_1
	$\Leftrightarrow \#_1(a \cdot w)\ \texttt{est pair}$	déf $\#_1$
	$\Leftrightarrow a \cdot w \in L_1$	déf L_1
10	$\forall w(w \in L_4 \Leftrightarrow w \in L_1)$	6, 7–9
11	$L_4 = L_1$	10

$L_2 = L_3$ par l'équivalence des deux présentations, à savoir celle par des règles de déduction et celle par des productions génératrices

$L_1 = L_2 = L_3 = L_4$ par $L_1 = L_2$, $L_4 = L_1$, et $L_2 = L_3$, et par la transitivité de l'égalité

Partie 2

Par les propriétés de stabilité des ensemble réguliers :

1	L est régulier	hyp
2	0^*1^* est régulier	
3	$L \cap 0^*1^*$ est régulier	1, 2, stabilité
4	$L \cap 0^*1^* = \{ 0^n1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$	
5	$\{ 0^n1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est régulier	3, 4
6	$\{ 0^n1^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ n'est pas régulier	cf. cours, exercices
7	$\perp$	5, 6
8	L n'est pas régulier	1, 2–7

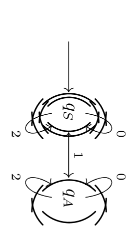
Par le théorème de Myhill-Nerode :

1	$n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m$	hyp
2	$0^n1^n \in L$	1, déf L
3	$1^m1^n \notin L$	1, déf L
4	$0^n1^n \in L \wedge 1^m1^n \notin L$	2, 3
5	$0^n1^n \in L \Leftrightarrow 1^m1^n \notin L$	4
6	$\neg(0^n1^n \in L \Leftrightarrow 1^m1^n \in L)$	5
7	$\exists(w \in \Sigma^*)(\neg(0^nw \in L \Leftrightarrow 1^mw \in L))$	6
8	$\neg\forall(w \in \Sigma^*)(0^nw \in L \Leftrightarrow 1^mw \in L)$	7
9	$0^n \not\equiv_L 1^m$	8, déf $\equiv_L$
10	$\forall n, m((n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m) \Rightarrow 0^n \not\equiv_L 1^m)$	1–9
11	$\equiv_L$ a un index infini	10
12	L n'est pas régulier	11, théorème de Myhill-Nerode

Par la contraposée du lemme de gonflement :

1	$n \in \mathbb{N}$	hyp
2	$\boxed{0^n1^n} \in L$	déf L
3	$\lvert\boxed{0^n1^n}\rvert = 2n \geq n$	déf $\lvert\cdot\rvert$
4	$x, y, z \in \Sigma^*$	hyp
5	$\boxed{0^n1^n} = xyz$	hyp
6	$y \neq \epsilon$	hyp
7	$\lvert xy\rvert \leq n$	hyp
8	$\exists l(1 \leq l \leq n \land y = 0^l)$	5, 6, 7
9	$1 \leq l \leq n \land y = 0^l$	hyp
10	$xz = 0^{n-l}1^n$	5, 9
11	$0^{n-l}1^n \in L$	hyp
12	$\exists(w \in \Sigma^*)(0^{n-l}1^n = w\overline{w})$	11, déf L
13	$w \in \Sigma^* \land 0^{n-l}1^n = w\overline{w}$	hyp
14	$l = 0$	13
15	$\perp$	9, 14
16	$\perp$	12, 13–15
17	$0^{n-l}1^n \notin L$	11–16
18	$xz \notin L$	10, 17
19	$xz \notin L$	8, 9–18
20	$xy^0z \notin L$	19
21	$\exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L)$	20
22	$\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L)$	7–21
23	$y \neq \epsilon \Rightarrow (\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L))$	6–22
24	$\boxed{0^n1^n} = xyz \Rightarrow (y \neq \epsilon \Rightarrow (\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L)))$	5–23
25	$\forall(x, y, z \in \Sigma^*)(\boxed{0^n1^n} = xyz \Rightarrow (y \neq \epsilon \Rightarrow (\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L))))$	4–24
26	$\exists(w \in L)(\lvert w\rvert \geq n \land \forall(x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \Rightarrow (y \neq \epsilon \Rightarrow (\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L)))))$	2, 3, 25
27	$\forall(n \in \mathbb{N})\exists(w \in L)(\lvert w\rvert \geq n \land \forall(x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \Rightarrow (y \neq \epsilon \Rightarrow (\lvert xy\rvert \leq n \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N})(xy^kz \notin L)))))$	1–26

Partie 3 L'automate demandé peut être :



Comme il a exactement deux états qui ne peuvent pas être dans la même classe d'équivalence, l'un étant final et l'autre ne l'étant pas, il est minimal.

L'expression régulière dérivée est L_{q_S} :

1	$L_{q_A} = 0L_{q_A} + 2L_{q_A} + 1L_{q_S}$	
	$= (0+2)L_{q_A} + 1L_{q_S}$	
	$= (0+2)^*1L_{q_S}$	lemme d'Arden
2	$L_{q_S} = 0L_{q_S} + 2L_{q_S} + 1L_{q_A} + \boldsymbol{\epsilon}$	
	$= 0L_{q_S} + 2L_{q_S} + 1(0+2)^*1L_{q_S} + \boldsymbol{\epsilon}$	
	$= (0+2+1(0+2)^*1)^*\boldsymbol{\epsilon}$	lemme d'Arden
	$= (0+2+1(0+2)^*1)^*$	

Et elle est bien la même que celle trouvée dans la partie 1.