1 Définitions (rappel)

Définition 1.1 (Propriétés des relations binaires) *Une relation binaire $R \subseteq A \times A$ sur un ensemble A est,*

réflexive *si* $\forall a \in A.\, aRa$,

irréflexive *si* $\forall a \in A.\, \neg aRa$,

symétrique *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \Rightarrow bRa$,

antisymétrique *si* $\forall a, b \in A.\, (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$,

transitive *si* $\forall a, b, c \in A.\, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$,

totale *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \vee bRa$,

une trichotomie *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \vee a = b \vee bRa$ □

Définition 1.2 (Ordres) *Soit A un ensemble et $R \subseteq A \times A$ une relation.*

Pré-ordre. *Le couple (A, R) est un pré-ordre si R est réflexive et transitive.*

Ordre partiel. *Le pré-ordre (A, R) est un ordre (partiel) si R est antisymétrique.*

Ordre total. *L'ordre partiel (A, R) est un ordre total si R est total sur A.*

Ordre strict. *Le couple (A, R) est un ordre strict si R est irréflexive et transitive.*

Ordre total strict. *Le couple (A, R) est un ordre total strict si (A, R) est un ordre total et R est une trichotomie.* □

Exercice Les propriétés élémentaires de toutes les relations R binaires sur un ensemble $\{1, 2, 3\}$ a trois elements (modulo permutation des elements).

Chaque ligne correspond a une relation. Les trois premières colonnes définissent la relation, colonne i contenant $\{x \mid iRx\}$. Par exemple, si "23" est dans la colonne titulée "$1R$", ça veut dire que $1R2$ et $1R3$ mais non $1R1$.

Les autres colonnes sont a vous de remplir ; cochez si la relation satisfait a la propriété. Les propriétés sont abergées comme suit.

réflexive	r	pré-ordre	pr
irréflexive	i	ordre partiel	po
symétrique	s	ordre partiel strict	sp
asymétrique	a	ordre total	to
antisymétrique	n	ordre total strict	st
transitive	t	équivalence	eq
totale	o		
trichotomie	h		

$1R$	$2R$	$3R$	r	i	s	a	n	t	o	h	pr	po	sp	to	st	eq
∅	∅	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
123	123	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	∅	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23	123	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	∅	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
13	123	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
12	∅	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	123	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23	∅	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	123	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	1	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23	23	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	1	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
13	23	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	1	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
12	23	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	2	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23	13	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	2	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
12	13	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1	3	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23	12	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
2	3	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
13	12	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
3	3	∅	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
12	12	123	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

$1R$	$2R$	$3R$	r	i	s	a	n	t	o	h	pr	po	sp	to	st	eq
123	$\emptyset$	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
$\emptyset$	123	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	1	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	23	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	2	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	13	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	3	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	12	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	1	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	23	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	2	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	13	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	3	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	12	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	1	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	23	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	2	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	13	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	3	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	12	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	2	3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	13	12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	2	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	13	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	1	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	23	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	1	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	23	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	3	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	12	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	1	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	23	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	3	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	12	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□

$1R$	$2R$	$3R$	r	i	s	a	n	t	o	h	pr	po	sp	to	st	eq
123	1	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
$\emptyset$	23	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
123	2	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
$\emptyset$	13	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
123	3	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
$\emptyset$	12	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	12	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	3	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	13	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	2	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	23	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	1	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	13	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	2	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
13	23	$\emptyset$	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
2	1	123	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	1	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	23	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	1	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	23	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	1	3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	23	12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	2	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	13	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	2	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	13	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	2	3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	13	12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	3	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	12	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
12	3	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
3	12	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	1	1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	23	23	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	1	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	23	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	1	3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	23	12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	2	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	13	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	2	3	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	13	12	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
23	3	2	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□
1	12	13	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□