# 1 Définitions (rappel)

**Définition 1.1 (Propriétés des relations binaires)** *Une relation binaire $R \subseteq A \times A$ sur un ensemble $A$ est,*

***réflexive*** *si* $\forall a \in A.\, aRa$,

***irréflexive*** *si* $\forall a \in A.\, \neg aRa$,

***symétrique*** *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \Rightarrow bRa$,

***antisymétrique*** *si* $\forall a, b \in A.\, (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$,

***transitive*** *si* $\forall a, b, c \in A.\, (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$,

***totale*** *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \vee bRa$,

***une trichotomie*** *si* $\forall a, b \in A.\, aRb \vee a = b \vee bRa$ □

**Définition 1.2 (Ordres)** *Soit $A$ un ensemble et $R \subseteq A \times A$ une relation.*

***Pré-ordre.*** *Le couple $(A, R)$ est un pré-ordre si $R$ est réflexive et transitive.*

***Ordre partiel.*** *Le pré-ordre $(A, R)$ est un ordre (partiel) si $R$ est antisymétrique.*

***Ordre total.*** *L'ordre partiel $(A, R)$ est un ordre total si $R$ est total sur $A$.*

***Ordre strict.*** *Le couple $(A, R)$ est un ordre strict si $R$ est irréflexive et transitive.*

***Ordre total strict.*** *Le couple $(A, R)$ est un ordre total strict si $(A, R)$ est un ordre total et $R$ est une trichotomie.* □

**Exercice** Les propriétés élémentaires de toutes les relations $R$ binaires sur un ensemble $\{1, 2, 3\}$ a trois elements (modulo permutation des elements).

Chaque ligne correspond a une relation. Les trois premières colonnes définissent la relation, colonne $i$ contenant $\{x \mid iRx\}$. Par exemple, si "23" est dans la colonne titulée "$1R$", ça veut dire que $1R2$ et $1R3$ mais non $1R1$.

Les autres colonnes sont a vous de remplir ; cochez si la relation satisfait a la propriété. Les propriétés sont abergées comme suit.

| | | | |
|---|---|---|---|
| réflexive | r | pré-ordre | pr |
| irréflexive | i | ordre partiel | po |
| symétrique | s | ordre partiel strict | sp |
| asymétrique | a | ordre total | to |
| antisymétrique | n | ordre total strict | st |
| transitive | t | équivalence | eq |
| totale | o | | |
| trichotomie | h | | |

| $1R$ | $2R$ | $3R$ | r | i | s | a | n | t | o | h | pr | po | sp | to | st | eq |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 123 | 123 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 23 | 123 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 13 | 123 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 12 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 | 123 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 23 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 123 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 1 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 23 | 23 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2 | 1 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 13 | 23 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 | 1 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 12 | 23 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 2 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 23 | 13 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 | 2 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 12 | 13 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 1 | 3 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 23 | 12 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 2 | 3 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 13 | 12 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 3 | 3 | $\emptyset$ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |
| 12 | 12 | 123 | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ | ☐ |

| $1R$ | $2R$ | $3R$ | r | i | s | a | n | t | o | h | pr | po | sp | to | st | eq |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 123 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $\emptyset$ | 123 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 1 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 23 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 2 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 13 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 3 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 12 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 1 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 23 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 2 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 13 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 3 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 12 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 1 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 23 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 2 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 13 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 3 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 12 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 2 | 3 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 13 | 12 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 2 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 13 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 1 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 23 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 1 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 23 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 3 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 12 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 1 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 23 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 3 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 12 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

| $1R$ | $2R$ | $3R$ | r | i | s | a | n | t | o | h | pr | po | sp | to | st | eq |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 123 | 1 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $\emptyset$ | 23 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 123 | 2 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $\emptyset$ | 13 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 123 | 3 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $\emptyset$ | 12 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 12 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 3 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 13 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 2 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 23 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 1 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 13 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 2 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 13 | 23 | $\emptyset$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 2 | 1 | 123 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 1 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 23 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 1 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 23 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 1 | 3 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 23 | 12 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 2 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 13 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 2 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 13 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 2 | 3 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 13 | 12 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 3 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 12 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 12 | 3 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 3 | 12 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 1 | 1 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 23 | 23 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 1 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 23 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 1 | 3 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 23 | 12 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 2 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 13 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 2 | 3 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 13 | 12 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 23 | 3 | 2 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| 1 | 12 | 13 | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |