Informatique Théorique III	Quiz 5 Corrigé	17 nov 2004

Les explications des réponses sont marquées avec ♣.

1. Vrai ou Faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Vrai	Faux	
☐	☒	Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si on arrive à montrer que $\mathbf{G}(L)$ $$\mathbf{G}(L) \triangleq \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\, \lvert w\rvert \geq n \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists x, y, z \in \Sigma^* \,. \quad w = xyz \\ \wedge\, y \neq \epsilon \\ \wedge\, \lvert xy\rvert \leq n \\ \wedge\, \forall k \in \mathbb{N} \,.\, xy^k z \in L \end{pmatrix}$$ est vrai, alors on a prouvé que L est un langage régulier.
	♣	L régulier $\Rightarrow \mathbf{G}(L)$, mais pas $\mathbf{G}(L) \Rightarrow L$ régulier.
☒	☐	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$.
☒	☐	Soit $\mathbf{G}(L)$ défini comme au premier point ci-dessus. Sa négation est : $$\neg\, \mathbf{G}(L) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \,.\, \exists w \in L \,.\, \lvert w\rvert \geq n \wedge \neg \begin{pmatrix} \exists x, y, z \in \Sigma^* \,. \quad w = xyz \\ \wedge\, y \neq \epsilon \\ \wedge\, \lvert xy\rvert \leq n \\ \wedge\, \forall k \in \mathbb{N} \,.\, xy^k z \in L \end{pmatrix}$$
♣		La partie $\exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\,$ dans $\mathbf{G}(L)$ est générale et doit donc être niée. L'implication vue au point précédent peut être réécrite comme : $\neg(\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \exists w \in L \,.\, A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \neg(\exists w \in L \,.\, (A \Rightarrow B))$ $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\, \neg(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\, (A \wedge (\neg B)))$
☐	☒	Soit Σ un alphabet et $A, B \subseteq \Sigma^*$ des langages. Si B n'est pas régulier et $B \subset A$ alors A n'est pas régulier.
	♣	Les propriétés de stabilité ne nous disent rien par rapport à l'inclusion des langages. Par exemple, $L \triangleq \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier, $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset 0^*1^*$, mais 0^*1^* est régulier.

2. Correcte ou Pas ?

Soit donné le problème :
Une chaîne w dont les parenthèses sont *équilibrées*, noté w équilibré, satisfait la propriété suivante.

$$w \text{ équilibré} \Leftrightarrow |w|_(= |w|_) \text{ et } \forall w' \text{ si } w' \ll_p w \text{ alors } |w'|_(\geq |w'|_)$$

Montrez que le langage $\{w \in \{(,), a\}^* \mid w \text{ équilibré}\}$ n'est pas régulier.

Les preuves suivantes sont-elles correctes... ou pas ?
N.B. : C'est possible que plusieurs preuves soient correctes.

Correcte	**ou Pas**	
☐	☒	Prenons $n = 3$ et construisons la chaîne $w = (^3)^3 \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ quelconque telle que $y \neq \epsilon$ et $\lvert xy\rvert \leq 3$. Étant donné que $w = xyz = (^3)^3$, $\lvert xy\rvert \leq 3$ et que $y \neq \epsilon$, nous savons que $xy = (^i$ avec $\lvert y\rvert_(\geq 1$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\lvert xy\rvert_) = \lvert(^i\rvert_) = 0$, nous avons $\lvert xz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_(= 3$. Par ailleurs, $\lvert xz\rvert_(= \lvert xyz\rvert_(- \lvert y\rvert_(= 3 - \lvert y\rvert_($ et nous savons que $\lvert y\rvert_($ est soit 1, soit 2, soit 3, cela signifie que $\lvert xz\rvert_(= 3 - \lvert y\rvert_(< 3 = \lvert xz\rvert_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.
	♣	On n'a pas le droit de choisir n. Il doit être quelconque.
☒	☐	Prenons n quelconque et construisons la chaîne $w = (^n)^n \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ quelconque telle que $y \neq \epsilon$ et $\lvert xy\rvert \leq n$. Étant donné que $w = xyz = (^n)^n$, $\lvert xy\rvert \leq n$ et que $y \neq \epsilon$, nous savons que $xy = (^i$ avec $\lvert y\rvert_(\geq 1$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\lvert xy\rvert_) = \lvert(^i\rvert_) = 0$, nous avons $\lvert xz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_(= n$. Par ailleurs, $\lvert xz\rvert_(= \lvert xyz\rvert_(- \lvert y\rvert_(= n - \lvert y\rvert_($ et nous savons que $\lvert y\rvert_(\geq 1$, cela signifie que $\lvert xz\rvert_(= n - \lvert y\rvert_(< n = \lvert xz\rvert_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.
☐	☒	Prenons n quelconque et construisons la chaîne $w = (^n)^n \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ telle que $x = (^{n-2}$ et $y = (^2$, qui respecte donc les conditions $y \neq \epsilon$ et $\lvert xy\rvert \leq n$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\lvert xy\rvert_) = \lvert(^n\rvert_) = 0$, nous avons $\lvert xz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_) = \lvert xyz\rvert_(= n$. Par ailleurs, $\lvert xz\rvert_(= \lvert xyz\rvert_(- \lvert y\rvert_(= n - 2$ cela signifie que $\lvert xz\rvert_(= n - 2 < n = \lvert xz\rvert_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.
	♣	On n'a pas le droit de choisir la décomposition $w = xyz$. Elle doit être quelconque.