Informatique Théorique III	Quiz 5	17 nov 2004

Ce quiz est anonyme, mais si vous notez votre nom (ou le nom de votre cousin/e) sur la feuille vous pourrez retirer cette dernière la semaine prochaine.

1. Vrai ou Faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Vrai	Faux	
☐	☐	Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si on arrive à montrer que $\mathbf{G}(L)$ $\mathbf{G}(L) \triangleq \exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall w \in L \,.\, \lvert w \rvert \geq n \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists x, y, z \in \Sigma^* \,. & w = xyz \\ & \wedge\, y \neq \epsilon \\ & \wedge\, \lvert xy \rvert \leq n \\ & \wedge\, \forall k \in \mathbb{N} \,.\, xy^k z \in L \end{pmatrix}$ est vrai, alors on a prouvé que L est un langage régulier.
☐	☐	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$.
☐	☐	Soit $\mathbf{G}(L)$ défini comme au premier point ci-dessus. Sa négation est : $\neg\, \mathbf{G}(L) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \,.\, \exists w \in L \,.\, \lvert w \rvert \geq n \wedge \neg \begin{pmatrix} \exists x, y, z \in \Sigma^* \,. & w = xyz \\ & \wedge\, y \neq \epsilon \\ & \wedge\, \lvert xy \rvert \leq n \\ & \wedge\, \forall k \in \mathbb{N} \,.\, xy^k z \in L \end{pmatrix}$
☐	☐	Soit Σ un alphabet et $A, B \subseteq \Sigma^*$ des langages. Si B n'est pas régulier et $B \subset A$ alors A n'est pas régulier.

2. Correcte ou Pas ?

Soit donné le problème :
Une chaîne w dont les parenthèses sont *équilibrées*, noté w équilibré, satisfait la propriété suivante.

$$w \text{ équilibré} \Leftrightarrow |w|_(= |w|_) \text{ et } \forall w' \text{ si } w' \ll_p w \text{ alors } |w'|_(\geq |w'|_)$$

Montrez que le langage $\{w \in \{(,),a\}^* \mid w \text{ équilibré}\}$ n'est pas régulier.

Les preuves suivantes sont-elles correctes... ou pas ?
N.B. : C'est possible que plusieurs preuves soient correctes.

Correcte	**ou Pas**	
☐	☐	Prenons $n = 3$ et construisons la chaîne $w = (^3)^3 \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ quelconque telle que $y \neq \epsilon$ et $\|xy\| \leq 3$. Étant donné que $w = xyz = (^3)^3$, $\|xy\| \leq 3$ et que $y \neq \epsilon$, nous savons que $xy = (^i$ avec $\|y\|_(\geq 1$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\|xy\|_) = \|(^i\|_) = 0$, nous avons $\|xz\|_) = \|xyz\|_) = \|xyz\|_(= 3$. Par ailleurs, $\|xz\|_(= \|xyz\|_(- \|y\|_(= 3 - \|y\|_($ et nous savons que $\|y\|_($ est soit 1, soit 2, soit 3, cela signifie que $\|xz\|_(= 3 - \|y\|_(< 3 = \|xz\|_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.
☐	☐	Prenons n quelconque et construisons la chaîne $w = (^n)^n \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ quelconque telle que $y \neq \epsilon$ et $\|xy\| \leq n$. Étant donné que $w = xyz = (^n)^n$, $\|xy\| \leq n$ et que $y \neq \epsilon$, nous savons que $xy = (^i$ avec $\|y\|_(\geq 1$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\|xy\|_) = \|(^i\|_) = 0$, nous avons $\|xz\|_) = \|xyz\|_) = \|xyz\|_(= n$. Par ailleurs, $\|xz\|_(= \|xyz\|_(- \|y\|_(= n - \|y\|_($ et nous savons que $\|y\|_(\geq 1$, cela signifie que $\|xz\|_(= n - \|y\|_(< n = \|xz\|_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.
☐	☐	Prenons n quelconque et construisons la chaîne $w = (^n)^n \in L$. Prenons une décomposition $w = xyz$ telle que $x = (^{n-2}$ et $y = (^2$, qui respecte donc les conditions $y \neq \epsilon$ et $\|xy\| \leq n$. Prenons $k = 0$ et formons $xy^0z = xz$, nous montrons que xz n'est pas dans L. Étant donné que $\|xy\|_) = \|(^n\|_) = 0$, nous avons $\|xz\|_) = \|xyz\|_) = \|xyz\|_(= n$. Par ailleurs, $\|xz\|_(= \|xyz\|_(- \|y\|_(= n - 2$ cela signifie que $\|xz\|_(= n - 2 < n = \|xz\|_)$, d'où l'on tire que $xz \notin L$.