Informatique théorique III
Série 8 solution

Prof. Nestmann, 2004

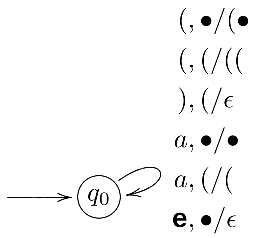
1. Automates à pile

Pour chacun des langages ci-dessous donnez un automate à pile qui le reconnaît. Précisez le mode d'acceptation.

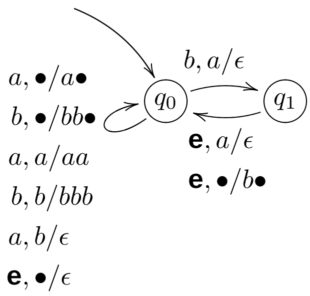
1. $\{w \in \Sigma^* \mid \mathrm{Equil}(w)\}$[1] avec $\Sigma = \{), (, a\}$.
2. $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2 * |w|_b\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
3. $\left\{a^i b^j c^k \in \Sigma^* \mid i \neq j \vee j \neq k\right\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Solution.

1. L'AAP$_{\text{pile}}$ $M = (\{q_0\}, \{a, (,)\}, \{\bullet, (\}, \Delta, q_0, \bullet)$ suivant convient.



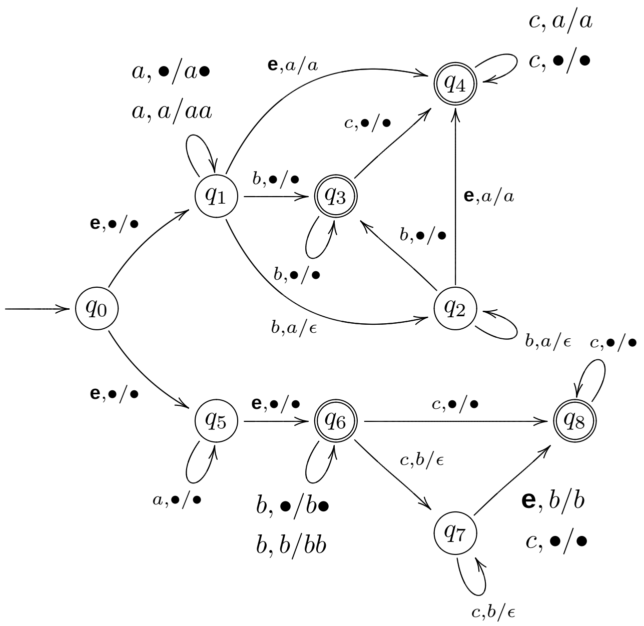
2. L'AAP$_{\text{pile}}$ $M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{\bullet, a, b\}, \Delta, q_0, \bullet)$ suivant convient.



3. L'AAP$_{\text{état}}$ $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, \bullet\}, \Delta, q_0, \bullet, \{q_3, q_4, q_6, q_8\})$

[1] $\mathrm{Equil}(w) \Leftrightarrow (|w|_(= |w|_)) \wedge (\forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow |u|_(\geq |u|_))$

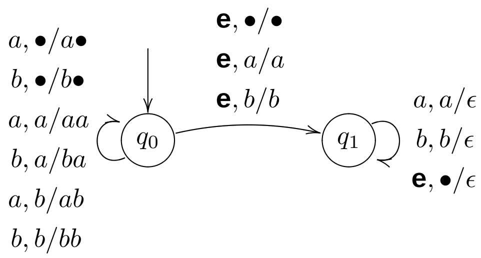
suivant convient.



■

2. Des automates au grammaires

Soit $\Sigma = \{a, b\}$ et $M = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, \Sigma \cup \{\bullet\}, \Delta, q_0, \bullet)$ l'automate ci-dessous qui accepte par le critère de la pile vide.



Essayez de comprendre le langage reconnu par l'automate puis transformez l'automate en grammaire. Simplifiez la grammaire en éliminant les règles de production inutiles et en renommant les symboles pour la rendre plus lisible.

Solution. L'automate reconnaît les palindromes de taille paire sur Σ. En suivant la méthode vue au cours, on obtient la grammaire $G = (V, \Sigma, P, S)$ avec les symboles non-terminaux :

$$\begin{aligned} V = \big\{ & S, [q_0 a q_0], [q_0 b q_0], [q_0 \bullet q_0], \\ & [q_0 a q_1], [q_0 b q_1], [q_0 \bullet q_1], \\ & [q_1 a q_1], [q_1 b q_1], [q_1 \bullet q_1] \big\} \end{aligned}$$

On a omit les symboles inutiles (ceux de q_1 à q_0). Les règles de productions sont :

$$S \to [q_0 \bullet q_0] \qquad S \to [q_0 \bullet q_1]$$

$$\begin{array}{lll}
[q_0 \bullet q_0] \to a[q_0 a q_0][q_0 \bullet q_0] & [q_0 \bullet q_0] \to b[q_0 b q_0][q_0 \bullet q_0] & [q_0 a q_0] \to a[q_0 a q_0][q_0 a q_0] \\
[q_0 \bullet q_1] \to a[q_0 a q_0][q_0 \bullet q_1] & [q_0 \bullet q_1] \to b[q_0 b q_0][q_0 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to a[q_0 a q_0][q_0 a q_1] \\
[q_0 \bullet q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 \bullet q_1] & [q_0 \bullet q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 a q_1] \\
[q_0 a q_0] \to b[q_0 b q_0][q_0 a q_0] & [q_0 b q_0] \to a[q_0 a q_0][q_0 b q_0] & [q_0 b q_0] \to b[q_0 b q_0][q_0 b q_0] \\
[q_0 a q_1] \to b[q_0 b q_0][q_0 a q_1] & [q_0 b q_1] \to a[q_0 a q_0][q_0 b q_1] & [q_0 b q_1] \to b[q_0 b q_0][q_0 b q_1] \\
[q_0 a q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 a q_1] & [q_0 b q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 b q_1] & [q_0 b q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 b q_1] \\
[q_0 \bullet q_1] \to [q_1 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to [q_1 a q_1] & [q_0 b q_1] \to [q_1 b q_1] \\
[q_1 a q_1] \to a & [q_1 b q_1] \to b & [q_1 \bullet q_1] \to \epsilon
\end{array}$$

Les règles de productions pour $[q_0 \bullet q_0], [q_0 a q_0]$ et $[q_0 b q_0]$ ne produisent pas de mot terminal. Elles peuvent donc être retirées, de même que toute les productions qui mentionnent ces symboles (car il ne sera pas possible d'en dériver un mot terminal). On obtient les règles suivantes :

$$S \to [q_0 \bullet q_1]$$

$$\begin{array}{lll}
[q_0 \bullet q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 a q_1] & [q_0 b q_1] \to a[q_0 a q_1][q_1 b q_1] \\
[q_0 \bullet q_1] \to [q_1 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 a q_1] & [q_0 b q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 b q_1] \\
[q_0 \bullet q_1] \to b[q_0 b q_1][q_1 \bullet q_1] & [q_0 a q_1] \to [q_1 a q_1] & [q_0 b q_1] \to [q_1 b q_1] \\
[q_1 a q_1] \to a & [q_1 b q_1] \to b & [q_1 \bullet q_1] \to \epsilon
\end{array}$$

L'unique règle pour S n'est pas très utile, nous remplacons donc le symbole $[q_0 \bullet q_1]$ par S. Par ailleurs on remplace les trois symboles $[q_1 a q_1]$, $[q_1 b q_1]$ et $[q_1 \bullet q_1]$ par leur *unique* production dans les autres règles. On obtient :

$$\begin{array}{lll}
S \to a[q_0 a q_1] & [q_0 a q_1] \to a[q_0 a q_1]a & [q_0 b q_1] \to a[q_0 a q_1]b \\
S \to \epsilon & [q_0 a q_1] \to b[q_0 b q_1]a & [q_0 b q_1] \to b[q_0 b q_1]b \\
S \to b[q_0 b q_1] & [q_0 a q_1] \to a & [q_0 b q_1] \to b
\end{array}$$

Finalement en renommant les symboles $[q_0 a q_1]$ et $[q_0 b q_1]$ en A et B, on obtient la grammaire $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ avec P tel que :

$$\begin{aligned}
S &\to aA \mid bB \mid \epsilon \\
A &\to aAa \mid bBa \mid a \\
B &\to aAb \mid bBb \mid b
\end{aligned}$$

■

3. Reconnaissance d'expressions arithmétiques

Soit l'alphabet $\Sigma = \{0, \ldots, 9, +, -, *, /, ^\wedge,), (\}$. On considère le langage des expressions arithmétiques sur les nombres entiers avec les opérateurs suivants.

opération	priorité	associativité	
$-$	3		négation
$^\wedge$	2	droite	exponentielle
$*$	1	gauche	multiplication
$/$	1	gauche	division
$+$	0	gauche	addition
$-$	0	gauche	soustraction

Dans le tableau ci-dessus, plus le nombre de priorité d'un opérateur est élevé plus sa priorité est forte. Dans les expressions on admet l'utilisation de parenthèses pour modifier la priorité et l'associativité des opérateurs, elles doivent cependant être équilibrées. Les nombres entiers ne doivent pas, excepté pour 0, commencer par un zéro (par exemple 002 n'est pas considéré comme un nombre).

Voici quelques exemples d'expressions arithmétiques bien formées :

$$69{*}2{+}5\hat{\ }2 \qquad -(346{-}3){*}{-}2 \qquad 2{*}5{+}4/(4{+}5) \qquad --0{+}10{+}687\hat{\ }(2+1)/5{+}7$$

et quelques-unes *mal* formées :

$$45{*}{*}23+2 \qquad 00234{+}34\hat{\ }(2{+}1) \qquad 234{+}((45{*}67){+}2 \qquad 823{+}{+}/4$$

1. Ajouter des parenthèses aux expressions suivantes de manière à rendre explicite la priorité et la précédence implicite des opérateurs.

$$\begin{aligned}2{*}4{+}22{+}452{+}{-}1 &\rightsquigarrow ((2{*}4){+}22){+}452){+}({-}1)\\ 452{+}123{*}12/4{-}2{+}45 &\rightsquigarrow\\ 20{+}{-}{-}20{+}68\hat{\ }2/23{-}23 &\rightsquigarrow\\ 2{+}{-}2{*}3\hat{\ }3\hat{\ }4{*}8{+}2\hat{\ }4\hat{\ }3{+}2{*}5 &\rightsquigarrow\end{aligned}$$

2. Donner une grammaire qui génère les expressions arithmétiques telles que décrites ci-dessus.
3. Transformer la grammaire en un automate à pile pour reconnaître les expressions arithmétiques bien formées. □

Solution.

1. $$\begin{aligned}452{+}123{*}12/4{-}2{+}45 &\rightsquigarrow ((452{+}((123{*}12)/4)){-}2){+}45\\ 20{+}{-}{-}20{+}68\hat{\ }2/23{-}23 &\rightsquigarrow ((20{+}({-}({-}20))){+}((68\hat{\ }2)/23)){-}23\\ 2{+}{-}2{*}3\hat{\ }3\hat{\ }4{*}8{+}2\hat{\ }4\hat{\ }3{+}2{*}5 &\rightsquigarrow ((2{+}((({-}2){*}(3\hat{\ }(3\hat{\ }4)))*8)){+}(2\hat{\ }(4\hat{\ }3))){+}(2{*}5)\end{aligned}$$
2. L'idée générale est d'introduire un symbole non-terminal par niveau de priorité. La récursion à droite ou à gauche du non terminal d'un niveau de priorité gère, respectivement, l'associativité à gauche ou à droite. Une grammaire possible est $G = (V, \Sigma, P, E_0)$ avec $V = \{E_0, E_1, E_2, E_3, N, N'\}$ et P tel que :

$$\begin{aligned}E_0 &\to E_0{+}E_1 \mid E_0{-}E_1 \mid E_1\\ E_1 &\to E_1{*}E_2 \mid E_1/E_2 \mid E_2\\ E_2 &\to E_3\,\hat{\ }E_2 \mid E_3\\ E_3 &\to -E_3 \mid N \mid (E_0)\\ N &\to 1N' \mid \ldots \mid 9N' \mid 0\\ N' &\to 0N' \mid \ldots \mid 9N' \mid \epsilon\end{aligned}$$

3. Suivant la méthode vue au cours, on définit l'automate $M = (\{q\}, \Sigma, \Sigma\cup V, \Delta, q, E_0)$

qui accepte par le critère de la pile vide avec Δ tel que :

$$
\begin{aligned}
\Delta(q, \mathbf{e}, E_0) &= \{(q, E_0{+}E_1), (q, E_0{-}E_1), (q, E_1)\} \\
\Delta(q, \mathbf{e}, E_1) &= \{(q, E_1{*}E_2), (q, E_1/E_2), (q, E_2)\} \\
\Delta(q, \mathbf{e}, E_2) &= \{(q, E_3{}^\wedge E_2), (q, E_3)\} \\
\Delta(q, \mathbf{e}, E_3) &= \{(q, -E_3), (q, N), (q, (E_0))\} \\
\Delta(q, \mathbf{e}, N) &= \{(q, 1N'), \dots, (q, 9N'), (q, 0)\} \\
\Delta(q, \mathbf{e}, N') &= \{(q, 0N'), \dots, (q, 9N'), (q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, 0, 0) &= \{(q, \epsilon)\} \\
&\vdots \\
\Delta(q, 9, 9) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, +, +) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, -, -) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, *, *) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, /, /) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, {}^\wedge, {}^\wedge) &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q, (, () &= \{(q, \epsilon)\} \\
\Delta(q,),)) &= \{(q, \epsilon)\}
\end{aligned}
$$

■