Informatique théorique III
Série 6 solution

Prof. Nestmann, 2004

1. Myhill-Nerode

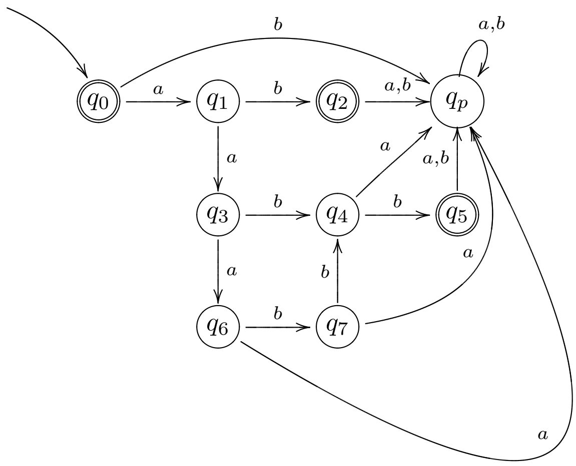
Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

1. (a) Définir un AFD M_3 qui accepte le langage $L_3 \triangleq \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 3\}$.
   (b) Décrire les classes d'équivalence de $\equiv_{M_3}$ par des expressions régulières.
   (c) Décrire les classes d'équivalence de $\equiv_{L_3}$ par des expressions régulières.
   (d) Comparer le nombre d'états de M_3 et de $M_{\equiv_{L_3}}$.
2. Montrer que le langage $L \triangleq \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier, en utilisant le théorème de Myhill-Nerode.

□

Solution.

1. (a) L'automate suivant convient :



(b)

$$
\begin{aligned}
[\epsilon] &= \mathrm{L}(\epsilon) \\
[a] &= \mathrm{L}(a) \\
[ab] &= \mathrm{L}(ab) \\
[aa] &= \mathrm{L}(aa) \\
[aaa] &= \mathrm{L}(aaa) \\
[aaab] &= \mathrm{L}(aaab) \\
[aab] &= \mathrm{L}(aab + aaabb) \\
[aabb] &= \mathrm{L}(aabb + aaabbb) \\
[b] &= \mathrm{L}((b + aaba + aaaa + aaaba + aaabba + (ab + aabb + aaabbb)(a + b))(a + b)^*)
\end{aligned}
$$

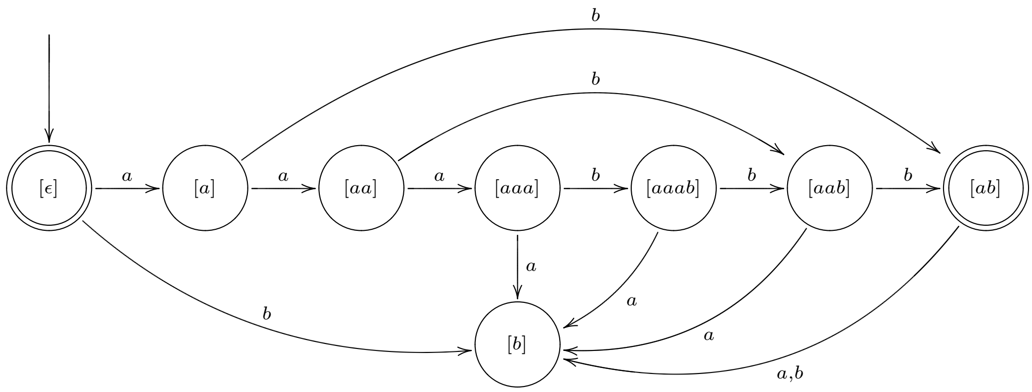
(c) Notre salut, comme souvent, passe par la connaissance du cours. En effet, on sait que $\equiv_{L_3}$ est la plus grande L_3-congruence et on sait d'autre part que $\equiv_{M_3}$ est une L_3-congruence. On en déduit donc que les classes de $\equiv_{M_3}$ sont incluses dans celles de $\equiv_{L_3}$ (il y a donc moins de classes pour $\equiv_{L_3}$

que pour $\equiv_{M_3}$). On cherche donc à réunir les classes trouvées à la question précédente pour trouver celles de $\equiv_{L_3}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
[\epsilon] &= \mathrm{L}(\epsilon)\\
[a] &= \mathrm{L}(a)\\
[ab] &= \mathrm{L}(ab + aabb + aaabbb)\\
[aa] &= \mathrm{L}(aa)\\
[aaa] &= \mathrm{L}(aaa)\\
[aaab] &= \mathrm{L}(aaab)\\
[aab] &= \mathrm{L}(aab + aaabb)\\
[b] &= \mathrm{L}((b + aaba + aaaa + aaaba + aaabba + (ab + aabb + aaabbb)(a + b))(a + b)^*)
\end{aligned}$$

Remarquer en outre que tous les mots qui ne sont pas préfixes d'un mot de L sont toujours équivalents selon $\equiv_L$.

(d) L'automate des classes $M_{\equiv_{L_3}}$ de $\equiv_{L_3}$ est :



Le nombre d'états de $M_{\equiv_{L_3}}$ est inférieur à celui de M_3.

2. D'après le théorème de Myhill-Nerode, cela revient à montrer que l'indice de $\equiv_L$ n'est pas fini, c'est-à-dire que $\equiv_L$ a une infinité de classes d'équivalence.
   Soit $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$. On va montrer que $a^i \not\equiv_L a^j$ ce qui aura pour conséquence que a^i et a^j sont dans des classes d'équivalences différentes pour tout $i \neq j$, ce qui montrera que $\equiv_L$ possède une infinité de classes d'équivalences.
   Considérons le mot b^i. Alors $a^i b^i \in L$ mais $a^j b^i \notin L$. Donc $a^i \not\equiv_L a^j$.
   D'où le résultat.

■

2. Algorithme de minimisation

Soit Σ un alphabet. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_{\leq n} = \{u \in \Sigma^* \mid |u| \leq n\} = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \Sigma^i$.

Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la relation $\sim_n$ sur Q par :

$$q \sim_n q' \Leftrightarrow (\forall u \in \Sigma_{\leq n} : \widehat{\delta}(q, u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q', u) \in F)$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sim_{n+1} \subseteq \sim_n$$

2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall q, q' \in Q : q \sim_{n+1} q' \Leftrightarrow \begin{cases} q \sim_n q' \\ \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a) \end{cases}$$
3. On suppose maintenant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sim_{n_0+1} = \sim_{n_0}$.
Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N} : \sim_{n_0+k} = \sim_{n_0}$$
en utilisant le résultat précédent.
4. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sim_{n_0+1} = \sim_{n_0}$ par un simple raisonnement combinatoire.

On a donc montré dans cet exercice que $\sim = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sim_n = \sim_{n_0}$ pour n_0 tel que $\sim_{n_0+1} = \sim_{n_0}$. Remarquer en outre que $\sim = \approx_M$. Cet exercice donne donc un moyen de calculer $\approx_M$ en partant de $\sim_0$ et en itérant le procédé de la deuxième question jusqu'à arriver à $\sim_{n_0}$. □

Solution.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q, q' \in Q$.
Supposons que $q \sim_{n+1} q'$ et montrons que $q \sim_n q'$.
Soit $u \in \Sigma_{\leq n}$. Alors $u \in \Sigma_{\leq n+1}$.
Comme $q \sim_{n+1} q'$, on a donc $\widehat{\delta}(q,u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',u) \in F$, ceci étant vrai quel que soit $u \in \Sigma_{\leq n}$, on a montré que $q \sim_n q'$.
D'où l'inclusion.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q, q' \in Q$.
   - $q \sim_{n+1} q' \Rightarrow \begin{cases} q \sim_n q' \\ \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a) \end{cases}$:
   Supposons $q \sim_{n+1} q'$ et montrons que $q \sim_n q'$ et $\forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a)$.
   D'après la question précédente, on a $\sim_{n+1} \subseteq \sim_n$ donc $q \sim_n q'$.
   Soit $a \in \Sigma$. On a :
   $$\begin{aligned} \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a) &\Leftrightarrow (\forall u \in \Sigma_{\leq n} : \widehat{\delta}(\delta(q,a),u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(\delta(q',a),u) \in F) \\ &\Leftrightarrow (\forall u \in \Sigma_{\leq n} : \widehat{\delta}(q,au) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',au) \in F) \end{aligned}$$
   Soit $u \in \Sigma_{\leq n}$. Par hypothèse, on a $q \sim_{n+1} q'$ et $au \in \Sigma_{\leq n+1}$ (car $|u| = n$) donc $\widehat{\delta}(q,au) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',au) \in F$. Ceci étant vrai quel que soit $u \in \Sigma_{\leq n}$, on a donc montré que $\delta(q,a) \sim_n \delta(q',a)$.
   D'où l'implication.
   - $\begin{cases} q \sim_n q' \\ \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a) \end{cases} \Rightarrow q \sim_{n+1} q'$:
   Supposons $q \sim_n q'$ et $\forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_n \delta(q',a)$ et montrons que $q \sim_{n+1} q'$.
   Soit $u \in \Sigma_{\leq n+1}$.
     - Premier cas $u \in \Sigma_{\leq n}$:
     Comme $q \sim_n q'$, on a $\widehat{\delta}(q,u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',u)$.
     - Second cas $|u| = n+1$:
     Il existe $a \in \Sigma$ et $u' \in \Sigma_{\leq n}$ tels que $u = au'$.
     On a $\widehat{\delta}(q,u) = \widehat{\delta}(q,au') = \widehat{\delta}(\delta(q,a),u')$ et $\widehat{\delta}(q',u) = \widehat{\delta}(\delta(q',a),u')$.
     Comme $\delta(q,a) \sim_n \delta(q',a)$, on a donc $\widehat{\delta}(\delta(q,a),u') \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(\delta(q',a),u') \in F$, c'est-à-dire $\widehat{\delta}(q,u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',u) \in F$.

Dans tous les cas, on a montré $\widehat{\delta}(q,u) \in F \Leftrightarrow \widehat{\delta}(q',u) \in F$, ceci étant vrai quel que soit $u \in \Sigma_{\leq n+1}$, on en déduit que $q \sim_{n+1} q'$.
D'où l'implication.

3. On raisonne par récurrence sur k pour montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : P(k)$ où P est le prédicat sur les entiers défini par :

$$P(k) \triangleq \sim_{n_0+k} = \sim_{n_0}$$

– $P(0)$: évident.
– $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
Soit $q, q' \in Q$.

$$\begin{aligned}
q \sim_{n_0+k+1} q' &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q \sim_{n_0+k} q' \\ \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_{n_0+k} \delta(q',a) \end{array} \right. && \text{d'après la question précédente} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q \sim_{n_0} q' \\ \forall a \in \Sigma : \delta(q,a) \sim_{n_0} \delta(q',a) \end{array} \right. && \text{car } P(k) \text{ est vrai} \\
&\Leftrightarrow q \sim_{n_0+1} q' && \text{d'après la question précédente} \\
&\Leftrightarrow q \sim_{n_0} q' && \text{car } \sim_{n_0+1} = \sim_{n_0}
\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$.
Par théorème de récurrence, on conclut que $\forall k \in \mathbb{N} : P(k)$ ce qui est le résultat voulu.

4. Comme Q est un ensemble fini, il y a un nombre fini de relations sur Q.
En raisonnant par l'absurde, supposons que (*) $\forall n \in \mathbb{N} : \sim_{n+1} \neq \sim_n$.
Alors on peut montrer que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, $\sim_i \neq \sim_j$ (voir la preuve ci-dessous), ce qui est une contradiction car cela donnerait un nombre infini de relations sur Q. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sim_{n_0+1} = \sim_{n_0}$.

Montrons que (*) implique que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, $\sim_i \neq \sim_j$.
Supposons (*). Soit $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$. Par symétrie, on peut supposer que $i < j$. D'après la première question, on a $\sim_j \subseteq \sim_i$. Par l'absurde, supposons que $\sim_i = \sim_j$. Alors on a

$$\sim_j \subseteq \sim_{j-1} \subseteq \ldots \subseteq \sim_{i+1} \subseteq \sim_i = \sim_j \subseteq \sim j$$

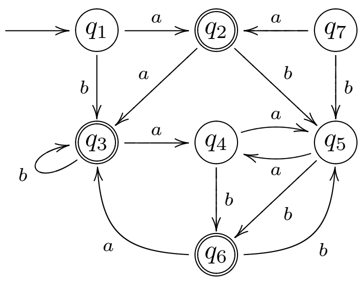
En particulier, $\sim_j \subseteq \sim_{i+1} \subseteq \sim_j$ donc $\sim_{i+1} = \sim_j$ i.e. $\sim_{i+1} = \sim_i$. On a donc trouvé un i qui contredit (*) : on conclut donc que $\sim_i \neq \sim_j$.

■

3. Minimisation d'automate anticonstitutionnelle

Minimiser l'AFD M donné par :

$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$



□

Solution. Suivant l'algorithme, on commence d'abord par éliminer les états inaccessibles. On calcule donc $\mathrm{acc}(M)$ et l'on obtient l'automate suivant,

$\Sigma = \{a, b\}$

$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$

	a	b
Sq_1	q_2	q_3
Fq_2	q_3	q_5
Fq_3	q_4	q_3
q_4	q_5	q_6
q_5	q_4	q_6
Fq_6	q_3	q_5

On construit les tableaux successifs suivants :

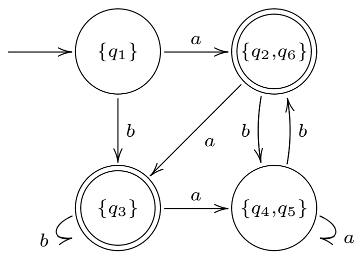
q_1					
$\surd$	q_2				
$\surd$	$-$	q_3			
$-$	$\surd$	$\surd$	q_4		
$-$	$\surd$	$\surd$	$-$	q_5	
$\surd$	$-$	$-$	$\surd$	$\surd$	q_6

q_1					
$\surd$	q_2				
$\surd$	$\surd$	q_3			
$\surd$	$\surd$	$\surd$	q_4		
$\surd$	$\surd$	$\surd$	$-$	q_5	
$\surd$	$-$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	q_6

On a donc $R = \{(q_2, q_6), (q_6, q_2), (q_4, q_5), (q_5, q_4)\} \cup \mathrm{id}(Q)$. Et nous avons pour $\mathrm{acc}(M)/_R$, l'automate suivant :

$\Sigma = \{a, b\}$

$Q = \{\{q_1\}, \{q_2, q_6\}, \{q_3\}, \{q_4, q_5\}\}$



∎