Informatique théorique III
Série 12 solution

Prof. Nestmann, 2005

1. Diagonalisation prolifique

Montrer que les langages suivants ne sont pas semi-décidables.

1. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \notin \mathrm{L}(M_{w\cdot 0})\}$
2. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \cdot 0 \notin \mathrm{L}(M_w)\}$ □

Preuve.

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que L_1 soit semi-décidable. Il existe alors une machine de Turing M tel que $\mathrm{L}(M) = L_1$. On sait, d'après l'encodage des MT en binaire, qu'il existe alors $w \in \{0,1\}^*$ tel que $M = M_w$. D'après la définition de l'encodage, on sait même que w se termine par un 0 ; il existe $w' \in \{0,1\}^*$ tel que $w = w' \cdot 0$. On se demande alors si $w' \in L_1$ ou si $w' \notin L_1$.
   (a) Supposons $w' \in L_1$. Par définition de L_1, cela signifie que $w' \notin \mathrm{L}(M_{w'0})$. C'est-à-dire, puisque $w = w'0$ et $M_w = M$ que $w' \notin \mathrm{L}(M) = L_1$. On arrive à une contradiction.
   (b) Supposons $w' \notin L_1$. Par définition de L_1, on a alors $w' \in \mathrm{L}(M_{w'0})$. Comme $w = w'0$ et $M = M_w$, on a donc $w' \in \mathrm{L}(M) = L_1$. On arrive encore à une contradiction.

   L'hypothèse de départ nous amène à une contradiction. On en déduit que L_1 n'est pas semi-décidable.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons que L_2 soit semi-décidable. Il existe une machine de Turing M tel que $\mathrm{L}(M) = L_2$. Partant de M, il est facile de construire une machine de Turing M' tel que $\mathrm{L}(M') = L_2 \cdot 0$. Par définition, $L_2 \cdot 0 = \{w \cdot 0 \in \{0,1\}^* \cdot 0 \mid w \cdot 0 \notin \mathrm{L}(M_w)\}$. D'après le codage des machines de Turing en binaire, il existe $w \in \{0,1\}^*$ tel que $M' = M_w$. On se demande alors si $w \cdot 0 \in L_2 \cdot 0$ ou si $w \cdot 0 \notin L_2 \cdot 0$.
   (a) Supposons $w \cdot 0 \in L_2 \cdot 0$. Par définition, on a $w \cdot 0 \notin \mathrm{L}(M_w)$. Comme $M_w = M'$, on a donc $w \cdot 0 \notin \mathrm{L}(M') = L_2 \cdot 0$: contradiction.
   (b) Supposons $w \cdot 0 \notin L_2 \cdot 0$. Par définition, on a alors $w \cdot 0 \in \mathrm{L}(M_w)$. Comme $M_w = M'$, on a donc $w \cdot 0 \in \mathrm{L}(M') = L_2 \cdot 0$: contradiction.

   L'hypothèse de départ nous amène à une contradiction. On en déduit que L_2 n'est pas semi-décidable.

■

2. Turing Club

Soit L un langage sur Σ semi-décidable tel que $\overline{L}$ est non-semi-décidable.
Quelle est la décidabilité du langage $L' = 0 \cdot L \cup 1 \cdot \overline{L}$? □

Solution. L' est non-semi-décidable.
Preuve.
Supposons$^{(*)}$ L' semi-décidable. Par définition il existe donc une machine de Turing M telle que $\mathrm{L}(M) = L'$. Il est alors relativement aisé de construire une machine de Turing M' qui :

1. Remplace le blanc situé avant le mot d'entrée w par un 1.
2. Puis se comporte comme M sur le mot $1w$.

Par définition M' accepte w si et seulement si M accepte le mot $1w$. Si M accepte le mot $1w$ cela signifie que $w \in \overline{L}$. Donc $\mathrm{L}(M') = \overline{L}$, une contradiction vu que $\overline{L}$ est non-semi-décidable. L'hypothèse $(*)$ est donc fausse. ∎