Solution examen blanc de 2004-12-22
Exercise 1.2, partie 1

19 janvier 2005

À prouver: $L_1 = L_2$. Nous montrons d'abord que

$$P(w) \triangleq (\#_1(w)\ \texttt{est pair} \iff w \in L_2) \wedge (\neg(\#_1(w)\ \texttt{est pair}) \iff w \in \overline{L_2})$$

est vraie pour tout $w \in \Sigma^*$ par induction structurelle.

Cas de base: $w = \epsilon$.
Par définition, $\#_1(w)$ `est pair` et $w \in L_2$. Comme il n'y a aucune règle permettant de dériver $w \in \overline{L_2}$ on a que $w \notin \overline{L_2}$. Alors, $P(\epsilon)$ est vraie.

Cas d'induction: $w = a \cdot u$, où $P(u)$.
Il y a deux cas: $\#_1(u)$ `est pair` et $\neg(\#_1(u)$ `est pair`$)$.

1. Si $\#_1(u)$ `est pair`, $P(u)$ nous donne que $u \in L_2$ et $u \notin \overline{L_2}$.
   Il y a deux cas: $a = 1$ et $a \neq 1$.
   (a) Si $a = 1$, alors par définition $\neg(\#_1(w)$ `est pair`$)$ et $w \in \overline{L_2}$. Comme $u \notin \overline{L_2}$ il n'y a aucune règle permettant de dériver $w \in L_2$, et alors $w \notin L_2$. Donc $P(w)$.
   (b) Si $a \neq 1$, alors par définition $\#_1(w)$ `est pair` et $w \in L_2$. Comme $u \notin \overline{L_2}$ il n'y a aucune règle permettant de dériver $w \in \overline{L_2}$, et alors $w \notin \overline{L_2}$. Donc $P(w)$.
2. Si $\neg(\#_1(u)$ `est pair`$)$, $P(u)$ nous donne que $u \notin L_2$ et $u \in \overline{L_2}$.
   Il y a deux cas: $a = 1$ et $a \neq 1$.
   (a) Si $a = 1$, alors par définition $\#_1(w)$ `est pair` et $w \in L_2$. Comme $u \notin L_2$ il n'y a aucune règle permettant de dériver $w \in \overline{L_2}$, et alors $w \notin \overline{L_2}$. Donc $P(w)$.
   (b) Si $a \neq 1$, alors par définition $\neg(\#_1(w)$ `est pair`$)$ et $w \in \overline{L_2}$. Comme $u \notin L_2$ il n'y a aucune règle permettant de dériver $w \in L_2$, et alors $w \notin L_2$. Donc $P(w)$.

Sachant que $\forall w \in \Sigma^*\ P(w)$,

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \Sigma^* \mid \#_1(w)\ \texttt{est pair}\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_2\} \\ &= L_2. \end{aligned}$$

Remarques:

1. Les définitions de L_1 et L_2 sont les deux par induction sur la décomposition de gauche des mots, ce qui facilite la preuve d'égalité.

2. Il fallait une hypothèse d'induction plus forte que (une équivalente à) la proposition à démontrer ($\#_1(w)$ `est pair` $\iff w \in L_2$).