Informatique théorique III
(Automates, langages & calculabilité)

Formulaire du Cours 2004-2005

Partie 8

EPFL – I&C

Uwe Nestmann

Sébastien Briais

Daniel C. Bünzli

14 février 2005

Bibliographie

[HMU03] John Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education International, 2003. ISBN 0321210298.

Table des matières

$Id: notes-8.tex,v 1.10 2004/12/08 11:46:23 uwe Exp $

semaine 8

Voir [HMU03] §6.1–3.

3.4 Automates à pile

3.4.1 Définition (AAP)
Un *automate à pile* (AAP) est un septuplet

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$$

où
- Q est un ensemble fini d'*états*,
- Σ est un ensemble fini de symboles, *l'alphabet d'entrée*,
- Γ est un ensemble fini de symboles, *l'alphabet de la pile*,
- $\Delta : (Q \times (\Sigma \cup \{\mathbf{e}\}) \times \Gamma) \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$ est la *fonction de transition*,
- $q_0 \in Q$ est l'*état initial* (ou de *départ*),
- $Z_0 \in \Gamma$ est le *symbole initial* (ou de *départ*),
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des *états accepteurs* (ou *finaux*).

Δ doit être une application ; si $\Delta(q, s, \gamma)$ n'est pas explicitement défini, alors nous admettons que $\Delta(q, s, \gamma) = \emptyset$ de manière implicite.

3.4.2 Notation On adopte les conventions d'écriture suivantes :
- $p, q, \ldots \in Q$
- $a, b, \ldots \in \Sigma$ et $u, v \ldots \in \Sigma^*$
- $X, Y, Z \in \Gamma$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma^*$

3.4.3 Notation (Graphe d'un AAP) On utilise la représentation des automates finis mais les flèches sont dessinées comme suit :

Si $(q', \alpha) \in \Delta(q, a, X)$,
on dessine une flèche étiquetée par $a, X/\alpha$ de q à q'.

3.4.4 Définition (Configurations et calculs)
Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ un AAP.

1. Une *configuration* de M est un triplet $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.
2. Soit $\vdash_M$ la relation sur les configurations de M définie par :

$$\begin{aligned} (q, aw, X\beta) &\vdash_M (q', w, \alpha\beta) && \text{si } (q', \alpha) \in \Delta(q, a, X) \\ (q, w, X\beta) &\vdash_M (q', w, \alpha\beta) && \text{si } (q', \alpha) \in \Delta(q, \mathbf{e}, X) \end{aligned}$$

   Si $c \vdash_M c'$ alors la paire (c, c') est une *étape de calcul* de M.
3. Un *calcul de M pour w* est une séquence de configurations de M,

$$(q_0, w, Z_0) \vdash_M (q_1, w_1, \gamma_1) \vdash_M \ldots \vdash_M (q_i, w_i, \gamma_i) \vdash_M \ldots$$

   où (q_0, w, Z_0) représente la *configuration initiale* du calcul. □

Lorsque l'automate M dont on parle est clair dans le contexte, on écrit simplement $\vdash$ à la place de $\vdash_M$.

3.4.5 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ un AAP.

1. Si $(q, x, \alpha) \vdash^* (q', y, \beta)$,
   alors pour tout $w \in \Sigma^*$ et $\gamma \in \Gamma^*$: $(q, xw, \alpha\gamma) \vdash^* (q', yw, \beta\gamma)$.
2. Si $(q, xw, \alpha) \vdash^* (q', yw, \beta)$,
   alors $(q, x, \alpha) \vdash^* (q', y, \beta)$.

3.4.6 Définition (Langages acceptés par un AAP)
Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ un AAP.

1. Le *langage accepté par M par état final* est défini par :

$$\mathrm{L}_{\text{état}}(M) \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \alpha \in \Gamma^* . (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \alpha) \}$$

2. Le *langage accepté par M par pile vide* est défini par :

$$\mathrm{L}_{\text{pile}}(M) \triangleq \{ w \in \Sigma^* \mid \exists q \in Q, \alpha \in \Gamma^* . (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \epsilon, \epsilon) \}$$

3.4.7 Notation Lorsque l'on s'intéresse uniquement au langage accepté par pile vide d'un automate, on ne précise pas l'ensemble des états finaux. Un AAP est appelé AAP_{pile} ou $\text{AAP}_{\text{état}}$ en fonction du mécanisme d'acceptation choisi.

3.4.8 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$ un AAP_{pile}.
Soit $M' = (Q \cup \{ p_0, p_\mathrm{f} \}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \Delta', p_0, X_0, \{ p_\mathrm{f} \})$ l'$\text{AAP}_{\text{état}}$ tel que $Q \cap \{ p_0, p_\mathrm{f} \} = \emptyset = \Gamma \cap \{X_0\}$ et

$$\begin{aligned}
\Delta' :\ (p_0, \mathbf{e}, X_0) &\mapsto \{ (q_0, Z_0X_0) \} \\
(q, a, Y) &\mapsto \Delta(q, a, Y) && \text{si } q \in Q, Y \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\mathbf{e}\} \\
(q, \mathbf{e}, X_0) &\mapsto \{ (p_\mathrm{f}, \epsilon) \} && \text{si } q \in Q
\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{L}_{\text{pile}}(M) = \mathrm{L}_{\text{état}}(M')$.

3.4.9 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0, F)$ un $\text{AAP}_{\text{état}}$.
Soit $M' = (Q \cup \{ p_0, p \}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \Delta', p_0, X_0)$ l'AAP_{pile} tel que $Q \cap \{ p_0, p \} = \emptyset = \Gamma \cap \{X_0\}$ et

$$\begin{aligned}
\Delta' :\ (p_0, \mathbf{e}, X_0) &\mapsto \{ (q_0, Z_0X_0) \} \\
(q, a, Y) &\mapsto \Delta(q, a, Y) && \text{si } q \in Q, Y \in \Gamma, a \in \Sigma \\
(q, \mathbf{e}, Y) &\mapsto \Delta(q, \mathbf{e}, Y) && \text{si } q \in Q \backslash F, Y \in \Gamma \\
(q, \mathbf{e}, Y) &\mapsto \Delta(q, \mathbf{e}, Y) \cup \{ (p, \epsilon) \} && \text{si } q \in F, Y \in \Gamma \\
(q, \mathbf{e}, X_0) &\mapsto \{ (p, \epsilon) \} && \text{si } q \in F \\
(p, \mathbf{e}, Y) &\mapsto \{ (p, \epsilon) \} && \text{si } Y \in \Gamma \cup \{X_0\}
\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{L}_{\text{état}}(M) = \mathrm{L}_{\text{pile}}(M')$.

3.4.10 Corollaire Soit Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$.
Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un AAP_{pile} M tel que $L = \text{L}_{\text{pile}}(M)$.
2. Il existe un $\text{AAP}_{\text{état}}$ M tel que $L = \text{L}_{\text{état}}(M)$.

3.4.11 Lemme Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une grammaire non-contextuelle, et $\Gamma \triangleq \Sigma \cup V$. Soit $M \triangleq (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \Delta, q, S)$ l'AAP_{pile} défini par :

$$
\begin{aligned}
\Delta :\ (\{q\} \times (\Sigma \cup \{\mathbf{e}\}) \times \Gamma) &\to \mathcal{P}(\{q\} \times \Gamma^*) \\
(q, \mathbf{e}, A) &\mapsto \{\, (q, \alpha) \mid (A \to_G \alpha) \in P \,\} \quad \text{si } A \in V \\
(q, a, a) &\mapsto \{\, (q, \epsilon) \,\} \quad \text{si } a \in \Sigma
\end{aligned}
$$

Alors $\text{L}_{\text{pile}}(M) = \text{L}(G)$.

3.4.12 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, Z_0)$ un AAP_{pile}.
Soit $G \triangleq (V, \Sigma, P, S)$ une grammaire non-contextuelle définie par :

1. S un nouveau symbole,
2. $V \triangleq \{\, [pZq] \mid p, q \in Q \wedge Z \in \Gamma \,\}$,
3. $$
\begin{aligned}
P \triangleq\ & \{\ S \to_G [q_0 Z_0 q] \mid q \in Q\ \} \\
\cup\ & \{\ [qZr_k] \to_G s[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{k-1}Y_kr_k] \\
& \quad \mid\ (r, Y_1 \cdots Y_k) \in \Delta(q, s, Z)\ \wedge\ r_1 \ldots, r_k \in Q\ \wedge\ s \in \Sigma\ \} \\
\cup\ & \{\ [qZr_k] \to_G [rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{k-1}Y_kr_k] \\
& \quad \mid\ (r, Y_1 \cdots Y_k) \in \Delta(q, \mathbf{e}, Z)\ \wedge\ r_1 \ldots, r_k \in Q\ \}
\end{aligned}
$$

Alors $\text{L}(G) = \text{L}_{\text{pile}}(M)$.

3.4.13 Corollaire Soit Σ un alphabet et $L \subseteq \Sigma^*$.
Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un AAP_{pile} M tel que $L = \text{L}(M)$.
2. Il existe une grammaire non-contextuelle G telle que $L = \text{L}(G)$.