Informatique théorique III
(Automates, langages & calculabilité)

Formulaire du Cours 2004-2005
Partie 5
EPFL – I&C

Uwe Nestmann
Sébastien Briais
Daniel C. Bünzli

14 février 2005

Bibliographie

[HMU03] John Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education International, 2003. ISBN 0321210298.

Table des matières

$Id: notes-5.tex,v 1.11 2005/01/13 09:28:28 uwe Exp $

semaine 5
lundi

Voir [HMU03] §4.1, §4.2.

2.5 Propriétés des langages réguliers

2.5.1 Théorème (Rappel) Soit Σ un alphabet, L un langage sur Σ. Les proposition suivantes sont équivalentes :

1. L est régulier.
2. Il existe un AFD M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
3. Il existe un AFN M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
4. Il existe un AFN$_{\mathbf{e}}$ M tel que $\mathrm{L}(M) = L$.
5. Il existe une expression régulière $\mathbf{x} \in \mathbf{RE}_\Sigma$ telle que $\mathrm{L}(\mathbf{x}) = L$.

2.5.2 Lemme Soit $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ et $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ deux AFD. Posons,

$$\begin{aligned} Q_{1\times 2} &\triangleq Q_1 \times Q_2 \\ \delta_{1\times 2}((q_1, q_2), a) &\triangleq (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \\ s_{1\times 2} &\triangleq (s_1, s_2) \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall x \in \Sigma^* : \widehat{\delta_{1\times 2}}((p, q), x) = (\widehat{\delta}_1(p, x), \widehat{\delta}_2(q, x))$$

L'automate $M_{1\otimes 2} \triangleq (Q_{1\times 2}, \Sigma, \delta_{1\times 2}, s_{1\times 2}, F_1 \times F_2)$
reconnaît le langage $L(M_{1\otimes 2}) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

L'automate $M_{1\oplus 2} \triangleq (Q_{1\times 2}, \Sigma, \delta_{1\times 2}, s_{1\times 2}, (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2))$
reconnaît le langage $L(M_{1\oplus 2}) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

2.5.3 Théorème (Propriétés de stabilité (1))
Soit Σ un alphabet et $A, B \subseteq \Sigma^*$ des langages réguliers. Alors,

1. $A \cap B$ est régulier.
2. $A \cup B$ est régulier.
3. AB est régulier.
4. A^* est régulier.
5. $\overline{A}$ est régulier.
6. $A \setminus B$ est régulier.

2.5.4 Définition (Homomorphisme de mots) Une application $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ est un *homomorphisme de mots* si

$$\begin{gathered} h(\epsilon) = \epsilon \\ \forall x, y \in \Sigma^* : h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y) \end{gathered}$$

2.5.5 Lemme Un homomorphisme de mots $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ est entièrement défini par son image sur Σ, c'est à dire par la donnée d'une application $f : \Sigma \to \Sigma'^*$.

2.5.6 Théorème (Propriétés de stabilité (2)) Soit Σ, Σ' deux alphabets et $h : \Sigma^* \to \Sigma'^*$ un homomorphisme de mots. alors

7. Si $B \subseteq \Sigma'^*$ est régulier, alors $h^R(B)$ est aussi régulier.
8. Si $A \subseteq \Sigma^*$ est régulier, alors $h(A)$ est aussi régulier.

□

Notons pour $A \subseteq \Sigma^*$, $h(A)$ régulier n'implique pas toujours A régulier.

2.6 Lemme de gonflement

2.6.1 Remarque (Principe des tiroirs de Dirichlet) Si l'on range strictement plus de n chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

2.6.2 Lemme Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD et $w \in \mathrm{L}(M)$ tel que $|w| > \#(Q)$. On décompose w en $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ avec $n = |w|$ et $a_i \in \Sigma$.
Alors il existe $1 \leq i < j \leq n$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} : (a_1 \cdot \ldots \cdot a_i) \cdot (a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_j)^k \cdot (a_{j+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \in \mathrm{L}(M)$$

2.6.3 Lemme (Gonflement) Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si L est régulier, alors $\mathbf{G}(L)$ est vrai avec

$$\mathbf{G}(L) \triangleq \exists n \in \mathbb{N} : \forall w \in L : |w| \geq n \Rightarrow \left(\begin{array}{ll} \exists x, y, z \in \Sigma^* : & w = xyz \\ & \land\, y \neq \epsilon \\ & \land\, |xy| \leq n \\ & \land\, \forall k \in \mathbb{N} : xy^k z \in L \end{array} \right)$$

2.6.4 Corollaire Soit Σ un alphabet et L un langage sur Σ. Si $\mathbf{G}(L)$ n'est pas satisfaite, alors L n'est pas régulier. □

Il est important de noter que le lemme de gonflement énonce une propriété *nécessaire* des langages réguliers, mais pas *suffisante*. On peut donc utiliser le lemme de gonflement — le corollaire plus précisement — pour montrer qu'un langage n'est *pas* régulier. Mais on ne peut pas l'utiliser pour montrer qu'un langage *est* régulier.