Informatique théorique III
(Automates, langages & calculabilité)

Formulaire du Cours 2004-2005
Partie 13
EPFL – I&C

Uwe Nestmann
Sébastien Briais
Daniel C. Bünzli

14 février 2005

Bibliographie

[HMU03] John Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education International, 2003. ISBN 0321210298.

[Koz97] Dexter Kozen. *Automata and Computability*. Springer Verlag New York Inc., 1997.

Table des matières

$Id: notes-13.tex,v 1.8 2005/01/24 10:40:21 uwe Exp $

semaine 13

Voir [HMU03] §9.3, et [Koz97] §32–34.

4.8 Raisonnement par réduction

4.8.1 Définition (Réduction)
Soit Σ, Δ deux alphabets et $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$.
Une *réduction* de A à B est une application $\sigma : \Sigma^* \to \Delta^*$ telle que :

1. σ est Turing-calculable par une machine totale.
2. $w \in A$ ssi $\sigma(w) \in B$

Nous écrivons $A \leq_{\mathrm{red}} B$ s'il existe une réduction de A à B.

4.8.2 Lemme
Soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ trois alphabets et $A_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $A_2 \subseteq \Sigma_2^*$, et $A_3 \subseteq \Sigma_3^*$.
Si $A_1 \leq_{\mathrm{red}} A_2$ et $A_2 \leq_{\mathrm{red}} A_3$, alors $A_1 \leq_{\mathrm{red}} A_3$.

4.8.3 Corollaire Soit Σ un alphabet, $(\Sigma^*, \leq_{\mathrm{red}})$ est un pré-ordre.

4.8.4 Théorème
Soit Σ, Δ deux alphabets et $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\mathrm{red}} B$.

1. Si B est décidable, alors A est décidable.
2. Si B est semi-décidable, alors A est semi-décidable.

4.8.5 Corollaire (Principe de réduction)
Soit Σ et Δ deux alphabets, $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Delta^*$ tels que $A \leq_{\mathrm{red}} B$.

1. Si A est indécidable, alors B est indécidable.
2. Si A n'est pas semi-décidable, alors B n'est pas semi-décidable.

4.9 Propriétés des langages semi-décidables

4.9.1 Définition (Rappel) $\mathcal{L}_0$ est l'ensemble des langages semi-décidables. Sans perte de généralité on suppose que l'alphabet de ces langages est $\{0, 1\}$.

4.9.2 Définition (Propriété)
Une *propriété* P sur les éléments de X est un sous-ensemble de X.
On peut le décrire :

1. par un prédicat $P(x)$, on a alors $P = \{x \in X \mid P(x)\}$,
2. ou par une fonction caractéristique $P : X \to \{0, 1\}$.

4.9.3 Définition (Décidabilité des propriétés)
Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.

1. P est *décidable* si sa fonction caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \to \{0, 1\}$$
$$L \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } L \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est totale et Turing-calculable.

2. P est *semi-décidable* si sa fonction semi-caractéristique

$$P : \mathcal{L}_0 \rightharpoonup \{0, 1\}$$
$$L \mapsto 1 \qquad \text{si } L \in P$$

   est Turing-calculable.

4.9.4 Définition
Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.
P est *triviale* si :

1. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 1$, ou si
2. $\forall L \in \mathcal{L}_0 \,.\, P(L) = 0$.

Sinon P est *non-triviale*.

4.9.5 Théorème (Rice I)
Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-triviale* est indécidable.

4.9.6 Définition
Soit $P \subseteq \mathcal{L}_0$ une propriété sur les langages semi-décidables.
P est *monotone* si :

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}_0 \,.\, L \subseteq L' \Rightarrow P(L) \leq P(L')$$

Sinon P est *non-monotone*.

4.9.7 Théorème (Rice II)
Toute propriété $P \subseteq \mathcal{L}_0$ *non-monotone* est non-semi-décidable.