Informatique théorique III
(Automates, langages & calculabilité)

Formulaire du Cours 2004-2005

Partie 12

EPFL – I&C

Uwe Nestmann

Sébastien Briais

Daniel C. Bünzli

14 février 2005

Bibliographie

[HMU03] John Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Pearson Education International, 2003. ISBN 0321210298.

Table des matières

$Id: notes-12.tex,v 1.10 2005/01/17 10:10:45 uwe Exp $

semaine 12

Voir [HMU03] §9.1.

4.4 Codage des entiers

4.4.1 Définition (Représentation binaire des entiers) Soit $\mathrm{bin} : \mathbb{N} \to \{\, 0, 1 \,\}^*$ la fonction définie par induction sur les entiers naturels par :

$$\begin{aligned} \mathrm{bin}(0) &\triangleq \epsilon \\ \mathrm{bin}(2n) &\triangleq \mathrm{bin}(n) \cdot 0 && \text{pour } n > 0 \\ \mathrm{bin}(2n+1) &\triangleq \mathrm{bin}(n) \cdot 1 && \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

4.4.2 Lemme

1. bin est injective, mais pas surjective.
2. $\mathrm{bin}(\mathbb{N}^*) = 1 \cdot \{0, 1\}^*$ donc $\mathrm{bin} : \mathbb{N}^* \to 1 \cdot \{0, 1\}^*$ est bijective.

4.4.3 Définition (Codage des entiers en binaire)

$$\begin{aligned} [\cdot] :\ \mathbb{N}^* &\to \{\, 0, 1 \,\}^* \\ i &\mapsto w && \text{si } \mathrm{bin}(i) = 1w \end{aligned}$$

4.4.4 Lemme

1. L'application $[\cdot]$ est bijective
   sa réciproque est définie par $[w]^{-1} = \mathrm{bin}^{-1}(1w)$.
2. De plus $[\cdot]$ respecte l'ordre lexicographique, c'est à dire :

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \,.\, i \leq j \Leftrightarrow [i] \ll_1 [j]$$

Ce lemme dit que le n^{e} mot selon l'ordre lexicographique est $[n]$. Réciproquement, étant donné un mot $w \in \{0, 1\}^*$, sa position dans l'ordre lexicographique est $[w]^{-1}$.

4.5 Codage des machines de Turing

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux machines de Turing avec alphabet d'entrée $\{0, 1\}$ qui comportent un unique état final, qui de sucroît est différent de l'état initial.

Soit $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_1, \mathrm{B}, F)$ une MT qui satisfait ces contraintes, on note alors :

- $F = \{\, q_2 \,\}$,
- $Q = \{\, q_1 \ldots, q_r \,\}$ avec $r \in \mathbb{N}$,
- $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, et $X_3 = \mathrm{B}$,
- $\Gamma = \{\, X_1 \ldots, X_s \,\}$ avec $s \in \mathbb{N}$.

On supposera en outre que δ mentionne au moins une fois, dans son domaine ou dans son image, chacun des éléments de Q et de Γ (cela signifie que les ensemble Q et Γ ne contiennent que des éléments « utiles »).

Ces restrictions ne sont en fait pas contraignantes. L'ensemble des machines qui les satisfont est noté **MT**.

4.5.1 Définition (Codage binaire d'une MT)
Posons $d_1 = -1$, $d_2 = 0$, $d_3 = 1$.
Soit $M = (Q, \{0,1\}, \Gamma, \delta, q_1, \mathrm{B}, F)$ une **MT**.
On code un élément $(q_i, X_j, q_k, X_l, d_m) \in \delta$ avec $i, j, k, l, m \in \mathbb{N}^*$, par le mot binaire suivant :

$$[\ (q_i, X_j, q_k, X_l, d_m)\ ] \triangleq 0^i \ 1 \ 0^j \ 1 \ 0^k \ 1 \ 0^l \ 1 \ 0^m$$

On ordonne les éléments de δ de la manière suivante :

$$(p, X, q, Y, d) \leq (p', X', q', Y', d') \Leftrightarrow p < p' \vee (p = p' \wedge X \leq X')$$

On code la fonction $\delta = \{z_1, \ldots, z_n\}$ (où $z_i < z_j$ si $i < j$) par :

$$[\delta] \triangleq z_1 \ 11 \ z_2 \ \cdots \ 11 \ z_n$$

Finalement le codage de M est donné par le codage de sa fonction de transition :

$$[M] \triangleq [\delta]$$

4.5.2 Lemme
La fonction $[\cdot] : \mathbf{MT} \to \{\,0,1\,\}^*$ est injective, mais pas surjective.

4.5.3 Lemme (Machine triviale)
Soit $M^{\mathrm{triv}} \triangleq (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,\mathrm{B}\}, \delta, q_1, \mathrm{B}, \{q_2\})$ avec δ définie par :

$$\begin{aligned} \delta(q_2, 0) &\triangleq (q_1, 0, 0) \\ \delta(q_2, 1) &\triangleq (q_1, 1, 0) \\ \delta(q_2, \mathrm{B}) &\triangleq (q_1, \mathrm{B}, 0) \end{aligned}$$

alors on a $\forall w \in \{0,1\}^* \ . \ (q_1, 1, w) \not\vdash_{M^{\mathrm{triv}}}$ et par conséquent $\mathrm{L}(M^{\mathrm{triv}}) = \emptyset$.

4.5.4 Définition Soit dec l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{dec} : \{\,0,1\,\}^* &\to \mathbf{MT} \\ w &\mapsto \begin{cases} M & \text{si } w = [M] \\ M^{\mathrm{triv}} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

On appelle n^{e} MT, la machine $M = \mathrm{dec}([n])$.

4.5.5 Notation Soit M une MT.

1. On écrit w_M pour $[M]$.
2. On écrit M_w pour $\mathrm{dec}(w)$.

4.6 Diagonalisation

4.6.1 Définition (Langage de diagonalisation)

$$L_{\mathrm{D}} \triangleq \{\, w \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid w \notin \mathrm{L}(M_w) \,\}$$

4.6.2 Théorème

1. L_{D} n'est pas semi-décidable.
2. $\overline{L_{\mathrm{D}}}$ est semi-décidable.

4.7 Universalité et problème de l'arrêt

Voir [HMU03] §9.2.

4.7.1 Définition Soit $M \in$ **MT** et $w \in \{\, 0, 1 \,\}^*$. La paire (M, w) est codée par :

$$[(M, w)] \triangleq [M]\ 111\ w$$

4.7.2 Définition (Langage universel)

$$L_{\mathrm{U}} \triangleq \big\{ [(M, w)] \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid w \in \mathrm{L}(M) \big\}$$

4.7.3 Théorème

1. L_{U} est semi-décidable.
2. L_{U} n'est pas décidable.
3. $\overline{L_{\mathrm{U}}}$ n'est pas semi-décidable.

4.7.4 Définition (Problème de l'arrêt)

$$L_{\mathrm{H}} \triangleq \big\{ [(M, w)] \in \{\, 0, 1 \,\}^* \mid M \text{ s'arrête pour } w \big\}$$

4.7.5 Théorème

1. L_{H} est semi-décidable.
2. L_{H} n'est pas décidable.
3. $\overline{L_{\mathrm{H}}}$ n'est pas semi-décidable.