Domaines Sémantiques

Giovanni Coray et Krzysztof Worytkiewicz
Première rédaction: Eté 1995
Mise à jour: Claude G. Diderich, Eté 1997

1 Préface

Nous traitons la *sémantique dénotationelle*, également appelée *sémantique de point fixe* ou encore *approche Scott-Strachey*. Le but est de *modéliser* les fonctions définissables dans les langages de programmation.

2 Problème du while dans LaProSE

$$i ::= a \mid \mathbf{dummy} \mid (i; i) \mid \mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ i\ \mathbf{else}\ i \mid \boxed{\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ i}$$

Intuitivement:

$$\sigma_{\text{instr}}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ i]\!]s = \sigma_{\text{instr}}[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (i;\ \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ i)\ \mathbf{else}\ \mathbf{dummy}]\!]s$$

Soient

$$\begin{aligned}
\theta &= \sigma_{\text{instr}}[\![\mathbf{if}\ b\ \mathbf{then}\ (i;\ \mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ i)\ \mathbf{else}\ \mathbf{dummy}]\!] \\
&= \sigma_{\text{instr}}[\![\mathbf{while}\ b\ \mathbf{do}\ s]\!] \\
\sigma_{\text{expr}}[\![b]\!] &= p\colon \mathbf{S} \to \mathbf{B} \\
\sigma_{\text{instr}}[\![i]\!] &= \theta'\colon \mathbf{S} \to \mathbf{S}
\end{aligned}$$

alors

$$\theta(s) = \mathsf{Cond}(p(s), \theta(\theta'(s)), s)$$

On voit que le membre de droite de l' équation peut s'écrire comme une fonctionnelle

$$F(\theta)(s) = \mathsf{Cond}(p(s), \theta(\theta'(s)), s)$$

où $F\colon (\mathbf{S} \to \mathbf{S}) \to (\mathbf{S} \to \mathbf{S})$ et $\Theta = F(\Theta)$ d'où le problème. Par exemple si $(\forall\ s \in \mathbf{S}.p(s) = \text{true}, \forall\ s \in \mathbf{S}.\theta'(s) = s)$ alors $(\theta(s) = \mathsf{Cond}(\text{true}, \theta(s), s) = \theta(s))$, c'est-à-dire $F = \text{Id}_{S \to S}$. Donc $\Theta = F(\Theta)$ ne spécifie pas de fonction particulière, donc le modèle est trivial ou indéfini dans ce cas particulier. Par contre dans le cas général, la sémantique du **while** est ramenée à la résolution d'une équation au point fixe.

2.1 Ordres partiels et fonctions monotones

Le symbole $\perp$ symbolise *l'indéfini*, c'est un élément ajouté systématiquement aux ensembles.

Le maniement des fonctionnelles partielles est plus problématique (mais la modélisation avec celles-ci peut être plus précise).

Exemple: le domaine des entiers naturels devient

$$\mathbb{N}_\perp \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{N} \bigcup \perp$$

Extension de l'opérateur $+$: $\forall x \in \mathbb{N}_\perp . \perp + x \stackrel{\text{déf}}{=} \perp$
La solution de l'équation $f(x) = f(x) + 1$ admet pour unique solution

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{N}_\perp & \longrightarrow & \mathbb{N}_\perp \\ & x & \longmapsto & \perp \end{array}$$

Problème: les fonctions arbitraires, par exemple

$$\begin{array}{rccl} w\colon & \mathbb{N}_\perp & \longrightarrow & \mathbb{N}_\perp \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & x = \perp \\ 1 & \text{autrement} \end{cases} \end{array}$$

fournissent un modèle non réaliste: décidabilité de l'arrêt! Plus généralement, on retrouve les mêmes problèmes si l'on introduit $\perp$ mais laisse *toutes* les fonctions comme admissibles.

On voudrait par exemple qu'une fonction f, dont la valeur est définie même pour un argument indéfini, soit constante:

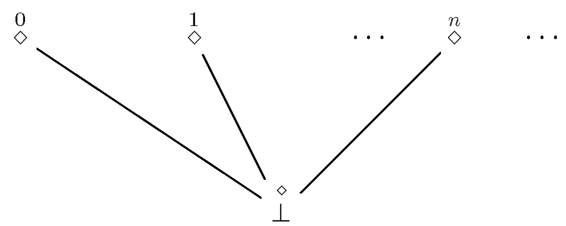
$$f(\perp) \neq \perp \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}_\perp . f(\perp) = f(x). \tag{1}$$

Définition 2.1 Un ordre partiel $(E, \sqsubseteq)$ est l'ensemble E de pair avec la relation $\sqsubseteq$ réflexive, antisymétrique et transitive. On dit aussi *ensemble partiellement ordonné* ou tout simplement *ordre*.

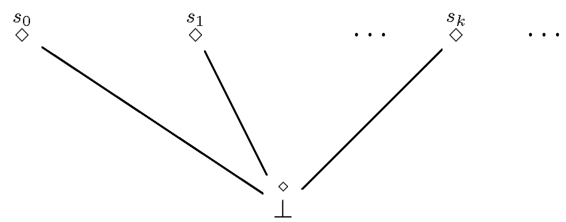
Remarque: Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on omet souvent la relation dans la notation et l'on parle de l'ordre E par abus de langage. Inversement, lorsqu'il y a risque de confusion, on note la relation d'ordre $\sqsubseteq_E$.

Définition 2.2 (Ordres plats) On appelle l'ordre E *plat* lorsque $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow (x = \perp) \vee (x = y)$.

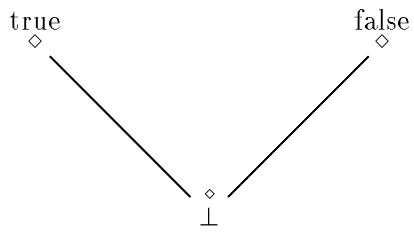
Exemples d'ordres plats.
$\mathbb{N}_\perp$:



$\mathbf{S}_\perp$:



$\mathbf{B}_\perp$:



Définition 2.3 (Fonctions monotones) Soient D et E deux ordres et $f\colon D \to E$ une fonction. La condition $x \sqsubseteq_D y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq_E f(y)$ fait de f une fonction *monotone*.

L'intuition de calcul (1) se traduit par la condition de monotonie sur l'ordre plat $\mathbb{N}_\perp$.

2.2 Le produit cartésien

Fonctions de plusieurs variables.

Exemple: $\mathsf{Cond}\colon \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{S}_\perp \times \mathbf{S}_\perp \to \mathbf{S}_\perp$

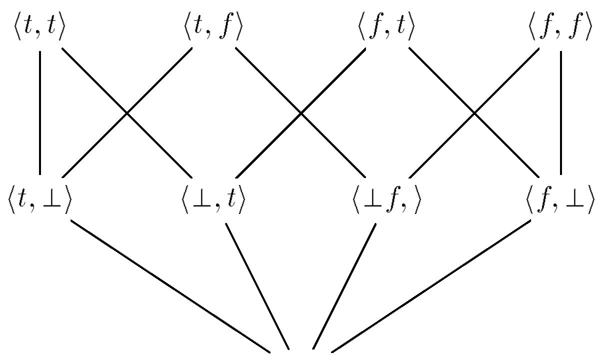
Intuition:

$$\mathsf{Cond}(t, s, s') = \begin{cases} \perp & \text{si} \quad t = \perp \\ s & \text{si} \quad t = \text{true} \\ s' & \text{si} \quad t = \text{false} \end{cases}$$

c'est-à-dire Cond est monotone *en chaque argument*. Rigoureusement: f est monotone par rapport à l'ordre induit $\sqsubseteq_{\mathbf{B}_\perp \times \mathbf{S}_\perp \times \mathbf{S}_\perp}$ défini par

$$\langle t, s_0, s_1 \rangle \sqsubseteq_{\mathbf{T}_\perp \times \mathbf{S}_\perp \times \mathbf{S}_\perp} \langle t', s'_0, s'_1 \rangle \Leftrightarrow (t \sqsubseteq_{\mathbf{T}_\perp} t') \;\&\; (s_0 \sqsubseteq_{\mathbf{S}_\perp} s'_0) \;\&\; (s_1 \sqsubseteq_{\mathbf{S}_\perp} s'_1)$$

Les ordres induits sur un produit cartésien par des ordres plats ne sont pas forcément plats. Exemple: $\mathbf{B}_\perp \times \mathbf{B}_\perp$.



2.3 L'espace-fonctions: Fonctionnelles de second ordre

Exemple: L'équation

$$\theta(s) = \mathsf{Cond}(p(s), \theta(\theta'(s)), s)$$

peut se réécrire comme

$$\theta = F(\theta)$$

F étant une fonctionnelle de second ordre

$$\begin{array}{rcl} F\colon (\mathbf{S}_\perp \rightarrow_M \mathbf{S}_\perp) & \rightarrow & (\mathbf{S}_\perp \rightarrow_M \mathbf{S}_\perp) \\ \theta & \mapsto & F(\theta)(s) = \mathsf{Cond}(p(s), \theta(\theta'(s)), s) \end{array}$$

avec

$$p\colon \mathbf{S}_\perp \rightarrow \mathbf{B}_\perp$$

et

$$\theta'\colon \mathbf{S}_\perp \rightarrow \mathbf{S}_\perp.$$

Intuition: l'ordre modélise le contenu d'information.

Soit $\overline{\theta}$ retournant une *quantité d'information* supérieure ou égale à celle de θ pour tout s. Alors $F(\overline{\theta})$ retournera une quantité d'information supérieure ou égale à celle de $F(\theta)$. Rigoureusement: F est monotone par rapport à l'ordre induit sur $\mathbf{S}_\perp \rightarrow_M \mathbf{S}_\perp$ défini par

$$\theta \sqsubseteq_{\mathbf{S}_\perp \rightarrow \mathbf{S}_\perp} \overline{\theta} \Leftrightarrow \forall s \in \mathbf{S}_\perp . \theta(s) \sqsubseteq_{\mathbf{S}_\perp} \overline{\theta}(s). \tag{2}$$

2.4 Le point fixe et les fonctions continues

Nous avons vu dans la section précédente que la dénotation d'une boucle à nombre d'itérations non borné peut s'exprimer à l'aide d'une fonctionnelle de second ordre, dans notre cas

$$F\colon (\mathbf{S}_\perp \rightarrow_M \mathbf{S}_\perp) \rightarrow (\mathbf{S}_\perp \rightarrow_M \mathbf{S}_\perp)$$

et de l'équation

$$\theta = F(\theta)$$

Recherché: le point fixe d'une fonctionnelle monotone.
Obstacle: il n'est pas vrai que toute fonction monotone possède un point fixe.
En fait les fonctions monotones ne conservent pas les bornes supérieures.

Soit **Part**, l'ensemble des fonctions partielles $f\colon \mathbb{N} \rightarrow_P \mathbf{B}$ muni de l'ordre

$$(f \sqsubseteq_{\mathbf{Part}} g) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.(f(n)\text{défini} \Rightarrow g(n)\text{défini})\&(f(n) = g(n)))$$

Soit

$$\begin{array}{rcl} F: & \mathbf{Part} & \rightarrow \mathbf{B}_\perp \\ & f & \mapsto \begin{cases} \text{true} & \text{si } \mathrm{dom}(f) = \mathbb{N} \\ \perp & \text{autrement} \end{cases} \end{array}$$

Il est immédiat que F est monotone[1].

Soient

$$\begin{array}{lll} \alpha_i : & \mathbb{N} & \to \text{true} \\ & n & \mapsto \text{true}, n \leq i \end{array}$$

D'une part

$$\bigsqcup_{i\in\omega} F(\alpha_i) = \perp$$

car

$$\forall i \in \mathbb{N}.dom(\alpha_i) \subset \mathbb{N}$$

D'autre part

$$F(\bigsqcup_{i\in\omega} \alpha_i) = \text{true}$$

car $\bigsqcup_{i\in\omega} \alpha_i = c_{\text{true}}$, la fonction constante

$$\begin{array}{lll} c_{\text{true}} : & \mathbb{N} & \to \text{true} \\ & n & \mapsto \text{true} \end{array}$$

définie partout[2].

La définition suivante évite ces cas.

Définition 2.4 On désigne par ω l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < n < \cdots$$

Définition 2.5 Soit $(E, \sqsubseteq)$ un ordre partiel et $D \subseteq E$.

1. un *majorant* de D est un élément $x \in E$ tel que

$$\forall y \in D.y \sqsubseteq x$$

2. une *borne sup* (ou *sup*) de D est le plus petit des majorants de D. S'il existe, on le note $\bigsqcup D$ ou $\bigsqcup_{i\in\omega} d_i$ s'il existe une énumération des éléments de $D = \langle d_i \rangle_{i\in\omega}$.

Définition 2.6 Soit $(E, \sqsubseteq)$ un ordre partiel. Une *chaîne* dans E est une famille $\langle x_i \rangle_{i\in\omega}$ telle que

$$\forall i \in \omega.x_i \sqsubseteq x_{i+1}$$

L'ordre dans $S_\perp \to_M S_\perp$ défini par 2 admet les bornes sup pour les chaînes:

Proposition 2.1 (Borne sup dans $(\mathbf{S}_\perp \to_M \mathbf{S}_\perp)$)

$$\left(\bigsqcup_{n\in\omega} \theta_n\right)(s) = \bigsqcup_{n\in\omega} (\theta_n(s))$$

[1] Il est impossible que $f \sqsubseteq g$ avec $\text{dom}(f) = \mathbb{N}$ et $\text{dom}(g) \subset \mathbb{N}$ car on trouverait un n tel que $f(n)$ défini et $g(n)$ non-défini

[2] En effet, tout i possède un successeur

A cause de l'ordre plat dans $\mathbf{S}_\perp$, toute chaîne dans $(\mathbf{S}_\perp \to_M \mathbf{S}_\perp)$ admet un sup.

Reprenons la fonctionnelle F de la section 2.3. On peut démontrer d'une manière élémentaire:

$$F(\bigsqcup_{n\in\omega} \theta_n)(s) = (\bigsqcup_{n\in\omega} F(\theta_n))(s)$$

En effet, soit $\langle\theta_n\rangle_{n\in\omega}$ une chaîne dans $\mathbf{S}_\perp \to \mathbf{S}_\perp$. Soit

$$F(\bigsqcup_{n\in\omega} \theta_n)(s) = s'$$

Nous supposons $s' \neq \perp$, les autres cas étant triviaux. $S_\perp$ étant un ordre plat, il existe un $k \in \omega$ tel que

$$(\bigsqcup_{n\in\omega} \theta_n)(s) = \bigsqcup_{n\in\omega} (\theta_n(s)) = \theta_k(s)$$

D'autre part on a besoin que d'une valeur de $\bigsqcup_{n\in\omega}(\theta_n(s))$ donnée par θ_k, d'où

$$F(\theta_k)(s) = s'$$

Il en découle que

$$(\bigsqcup_{n\in\omega} F(\theta_n))(s) = \bigsqcup_{n\in\omega} (F(\theta_n)(s)) = s'$$

car $s' \neq \perp$ par hypothèse. Donc F conserve les bornes sup X.

Conséquence, F admet le point fixe

$$\phi \overset{\text{déf}}{=} \bigsqcup_{n\in\omega} F^n(\perp)$$

Il est facile de le voir car

$$F(\phi) = F(\bigsqcup_{n\in\omega} F^n(\perp)) = \bigsqcup_{n\in\omega} F^{n+1}(\perp) = \phi$$

Intuition de calcul: ϕ est le plus petit point fixe de F. En effet:

$$\begin{array}{rcl}
F^0(\perp)(s) & = & \perp \\
F^1(\perp)(s) & = & \mathsf{Cond}(p(s), \perp, s) \\
F^2(\perp)(s) & = & \mathsf{Cond}(p(s), \mathsf{Cond}(p(\theta'(s)), \perp, \theta'(s)), s) \\
F^3(\perp)(s) & = & \mathsf{Cond}(p(s), \mathsf{Cond}(p(\theta'(s)), \mathsf{Cond}(p(\theta'(\theta'(s))), \\
 & & \perp, \theta'(\theta'(s))), \theta'(s)), s) \\
 & \vdots &
\end{array}$$

L 'intuition se démontre par induction : si ϕ est un autre point fixe de F alors $F^n(\perp) \sqsubseteq \phi$, ceci en “déroulant la boucle” comme ci-dessus. Par conséquent, ϕ extrait le plus petit point fixe.

3 CPO's

Nous *axiomatisons* les intuitions de calcul développées dans la section précédente.

3.1 Complete partial orders

Définition 3.1 l'ordre partiel $(D, \sqsubseteq)$ est un *cpo*[3] lorsque

1. Il existe un plus petit élément $\bot_D$ tel que $\forall x \in D. \bot_D \sqsubseteq x$.
2. Toute chaîne $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ d'élements dans D admet une borne sup

$$\bigsqcup_{n \in \omega} x_n$$

Définition 3.2 Soient les cpo's D et E. Une fonction $f: D \to E$ est *continue* si

1. f est monotone
2. f préserve les bornes sup des chaînes, ç.à.d $f(\bigsqcup_{n \in \omega} x_n) = \bigsqcup_{n \in \omega} f(x_n)$

Proposition 3.1 *Soient B, C, D trois cpo's et $f: C \to D$, $g: D \to E$ continues. Alors*

$$g \circ f: C \to E$$

est une fonction continue.

Définition 3.3 Soit $f: D \to D$ une fonction continue.

1. Un point *préfixe* de f est un élément $d \in D$ tel que $f(d) \sqsubseteq d$.
2. Un point *fixe* de f est un élément $d \in D$ tel que $f(d) = d$.

Définition 3.4 Soit D un cpo et $f: D \to D$ une fonction continue

$$\Phi_f \stackrel{\text{déf}}{=} \bigsqcup_n f^n(\bot_D)$$

Théorème 3.1 *Soit D un cpo et $f: D \to D$ une fonction continue. Φ_f est le plus petit point fixe de f.*

[3] Complete partial order, ensemble partiellement ordonné complet ou encore ordre complet.

3.2 CPO's induits

3.2.1 Le produit cartésien

Définition 3.5 Soient les cpo's D_i pour $i < n$. Le produit cartésien des D_i est un couple $\langle D, \langle \pi_i \rangle_{i<n} \rangle$, D étant un cpo et les π_i des fonctions continues telles que pour tout i, tout cpo E et toute fonction continue $g: E \to D_i$ il existe une et une seule fonction continue $!h: E \to D$ telle que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "!h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
D \arrow[r, "\pi_i"] & D_i
\end{tikzcd}
$$

commute. Les π_i sont appelées projections canoniques.

Proposition 3.2 (Unicité) *Soient les cpo's D_i pour $i < n$. Le produit cartésien des D_i est unique à une bijection continue près.*

Définition 3.6 (Existence) Soient les cpo's D_i pour $i < n$.

1. Le produit cartésien $\prod_{i<n} D_i$ des ensembles sous-jacents muni de l'ordre induit défini par

   $$\langle d_i \rangle_{i<n} \sqsubseteq_{\prod_{i<n} D_i} \langle d_i' \rangle_{i<n} \Leftrightarrow \forall i < n.\, d_i \sqsubseteq_{D_i} d_i'$$

   est un cpo.

2. Le cpo $\prod_{i<n} D_i$ est une instance du produit cartésien des cpo's D_i.

Pour $n = 2$ on emploie le symbole $\times$ en notation *infix*. Ceci se traduit par le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "!h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
D_0 & D_0 \times D_1 \arrow[l, "\pi_0"] \arrow[r, "\pi_1"'] & D_1
\end{tikzcd}
$$

Définition 3.7 (L'opérateur $\prod$ surchargé) Soient pour $i < n$, D_i , E_i des cpo's et $f_i: D_i \to E_i$ des fonctions continues. Alors la fonction

$$\prod_{i<n} f_i: \prod_{i<n} D_i \to \prod_{i<n} E_i$$

définie par

$$\prod_{i<n} f_i = \langle f_0 \circ \pi_0, \ldots f_{n-1} \circ \pi_{n-1} \rangle$$

est continue.

De même, pour $n = 2$ on surcharge l'opérateur $\times$:

$$f \times f' \colon D \times D' \to E \times E'$$

est continue pour $f \colon D \to E$ et $f' \colon D' \to E'$ continues.

Proposition 3.3 *Soient pour $i < n$ D_i, E_i, F_i des cpo's et $f_i \colon D_i \to E_i$, $g_i \colon E_i \to F_i$ des fonctions continues. Alors*

$$\prod_{i<n}(g_i \circ f_i) = (\prod_{i<n} g_i) \circ (\prod_{i<n} f_i)$$

Proposition 3.4 *Soient les cpo's D_i pour $i < n$. Alors*

$$\prod_{i<n} id_{D_i} = id_{\prod_{i<n} D_i}$$

Pour $n = 2$, les propositions 3.3 et 3.4 se notent respectivement

$$(g_0 \circ f_0) \times (g_1 \circ f_1) = (g_0 \times g_1) \circ (f_0 \times f_1) \quad \text{et} \quad id_{D_0} \times id_{D_1} = id_{D_0 \times D_1}.$$

3.2.2 L'espace-fonctions

Définition 3.8 Soient les cpo's D et E. L'ensemble des fonction continues $D \to E$ est également un cpo par rapport à l'ordre induit, ç.à.d

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq g(d)$$

En particulier, on a

$$\perp_{D \to E} = K_{\perp_E}$$

pour

$$\begin{array}{lll} K_{\perp_E} : & D & \to E \\ & x & \mapsto \perp_E \end{array}$$

et les bornes sup déterminées élément par élément:

$$(\bigsqcup_{n \in \omega} f_n)(x) = \bigsqcup_{n \in \omega}(f_n(x))$$

Définition 3.9 (L'opérateur "$\to$" surchargé) Soient A, B, A', B' des cpo's et $f \colon B \to A$, $f' \colon A' \to B'$ fonctions continues. Alors

$$\begin{array}{lll} f \to f' : & (A \to A') & \to (B \to B') \\ & g & \mapsto f' \circ g \circ f \end{array}$$

est une fonction continue.

Définition 3.10 Soient D et E deux cpo's, $x \in D$ et $f \in D \to E$. La fonction

$$\begin{array}{llll} apply: & (D \to E) \times D & \to E \\ & \langle f, x \rangle & \mapsto f(x) \end{array}$$

est continue.

Proposition 3.5 *Soient A, B, C, A', B', C' des cpo's et $f: B \to A$, $g: C \to B$, $f': A' \to B'$, $g': B' \to C'$ fonctions continues. Alors*

$$(f \circ g) \to (g' \circ f') = (g \to g') \circ (f \to f')$$

Proposition 3.6 *Soient D et E deux cpo's. Alors*

$$id_D \to id_E = id_{D \to E}$$

3.3 Relation entre les opérateurs "$\times$" et "$\to$"

Proposition 3.7 (Propriété Universelle) *Soit $f: F \times D \to E$ une fonction continue. Il existe une et une seule fonction continue $g: F \to (D \to E)$ telle que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} (D \to E) \times D \arrow[d, "apply"'] & F \times D \arrow[l, "g \times id_D"'] \arrow[dl, "f"] \\ E & \end{tikzcd}$$

commute.

Cette proposition est le fondement du *currying* tel qu'on le rencontre en λ-calcul ou en CAML Light. En effet, le corollaire suivant en découle:

Corollaire 3.1 *Il existe une bijection continue $(F \times D \to E) \cong (F \to (D \to E))$.*

3.4 La catégorie CPO

Proposition 3.8 *Pour tout cpo D il existe une et une seule fonction continue $d: D \to \{*\}$*

La classe des cpo's et des fonctions continues forment une *catégorie* avec les cpo's comme *objets* et les fonctions continues comme *morphismes*. Les proposition 3.2 et définition 3.6 en font une *CCC* (cartesian closed category). Dans le langage des catégories, l'espace-fonctions de deux cpo's est un *exposant* alors que la fonction d de la proposition 3.8 est un *objet terminal*.

3.5 CPO's comme domaines sémantiques

3.5.1 Le métalangage des CPO's

Nous introduisons semi-formellement un λ-calcul *typé* destiné à *dénoter* des éléments de cpo's. Le typage est ici assimilé à une relation d'appartenance à un cpo que nous écrivons $x : A$ pour un cpo A et x un élément de ce dernier[4] . Lorsqu'il n'y a pas d' ambiguïté, nous omettons la partie typage d'une expression.

C'est une notation commode pas destinée à une étude syntaxique rigoureuse. Cependant, pour bien séparer les *couches de représentation*, nous différencions entre une expression α du métalangage et l'entité $\overline{\alpha}$ dénotée par α.

Les constantes $a, \ldots$ et les variables $x, \ldots$ dénotent des éléments de cpo's. Leur types sont souvent pris dans le contexte d'utilisation.

Si $\alpha\colon A \to B$ et $\beta\colon B \to C$ sont des expressions du métalangage dénotant respectivement les fonctions continues $\overline{\alpha}\colon A \to B$ et $\overline{\beta}\colon B \to C$, alors l'expression du métalangage $\beta \circ \alpha\colon A \to C$ dénote la fonction continue $\overline{\beta} \circ \overline{\alpha}\colon A \to C$, la composée de $\overline{\alpha}$ et de $\overline{\beta}$.

Soient $\alpha\colon A \to B$, $\overline{\alpha} = f$, $e\colon A$, $\overline{e} = a$. Alors

$$\overline{\alpha(e)} = f(a)$$

Soient $e_0\colon D_0, \ldots e_{n-1}\colon D_{n-1}$. Alors

$$\langle e_0, \ldots e_{n-1} \rangle\colon D_0 \times \ldots \times D_{n-1}$$

et

$$\overline{\langle e_0, \ldots e_{n-1} \rangle} = \langle \overline{e_0}, \ldots \overline{e_{n-1}} \rangle$$

En particulier, nous avons les constantes π_i dénotant les projections canoniques du produit.

Soit $\alpha\colon F \times D \to E$. Nous avons les constantes

$$curry\colon (F \times D \to E) \to (F \to D \to E)$$

et

$$eval\colon ((D \to E) \times D) \to E$$

telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(D \to E) \times D \arrow[d, "\overline{eval}"'] & F \times D \arrow[l, "\overline{curry(\alpha)} \times \overline{id_D}"'] \arrow[dl, "\overline{\alpha}"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

[4] $x : A$ est donc ici *synonyme* de $x \in A$.

commute. Clairement, $\overline{eval} = apply$.

Soient $e\colon E$ et $x\colon D$. Alors $(\lambda x\colon D.e)\colon D \to E$. Soit $e'\colon D$. Nous avons $\overline{(\lambda x.e)e'} = \overline{[e'/x]e}$, $\overline{(\lambda x.e)x} = \overline{e}$, $x \notin FV(e)$, $\overline{\mu\, x.e} \stackrel{\text{déf}}{=} \Phi_{\overline{(\lambda\, x.e)}}$.

Exemple: la sémantique de la boucle à nombre d'itérations non-borné, appelée également **while** par abus de langage.

$$\sigma_{\text{instr}}[\![\textbf{while}\ b\ \textbf{do}\ s]\!] = \mu\,\theta\colon C.\lambda\, s\colon S_\perp.\mathsf{Cond}(\sigma_{\text{expr}}[\![b]\!]s, \theta(\sigma_{\text{instr}}[\![s]\!]s, s)$$