

Corrigé

---

**Exercice 1**

$$\text{E-COMPA} \frac{\text{E-ADDI} \frac{\text{E-NBRE} \quad \text{E-NBRE}}{\{\} \vdash 1 : \text{int}} \quad \text{E-NBRE} \quad \{\} \vdash 2 : \text{int}}{\{\} \vdash (1 + 1) = 2 : \text{bool}}$$

$$\text{E-COMPA} \frac{\text{E-NBRE} \quad \{\} \vdash 2 : \text{int} \quad \text{E-VRAI} \quad \{\} \vdash \text{true} : \text{bool}}{\{\} \vdash 1 = \text{true} : \text{bool}}$$

Comme  $\text{int} \neq \text{bool}$ , la règle E-COMPA n'est pas respectée : cette expression n'est pas bien typée.

$$\text{E-COND} \frac{\text{E-NBRE} \quad \{\} \vdash 1 : \text{int} \quad \text{E-VRAI} \quad \{\} \vdash \text{true} : \text{bool} \quad \text{E-NBRE} \quad \{\} \vdash 0 : \text{int}}{\{\} \vdash \text{if}(\text{true}) 1 \text{ else } 0 : \text{t}}$$

Par E-COND,  $t = \text{int}$

$$\begin{array}{c}
\text{E-DEF} \\
\frac{\text{E-VAL} \quad \frac{\text{E-NBRE} \quad \text{T-ENT}}{\{\} \vdash 1 : \text{int}} \quad \frac{\text{T-BOOL} \quad \text{T-INT}}{\text{bool} \diamond \quad \text{int} \diamond}}{\{p \rightarrow \text{int}\} \vdash \text{def } f(x : \text{bool}) : \text{int} = \text{if}(x) p \text{ else } 0; f(\text{true}) : t} \\
\frac{\{\} \vdash \text{val } p : \text{int} = 1; \text{def } f(x : \text{bool}) : \text{int} = \text{if}(x) p \text{ else } 0; f(\text{true}) : t}{} \\
\hline
\text{E-COND} \quad \frac{\text{E-IDENT} \quad \frac{x \rightarrow \text{bool} \in \{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\}}{\{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\} \vdash x : \text{bool}} \quad \text{E-NBRE} \quad \frac{\{\dots\} \vdash 0 : \text{int}}{\{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\} \vdash \text{if}(x) p \text{ else } 0 : \text{int}} \quad \text{E-IDENT} \quad \frac{p \rightarrow \text{int} \in \{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\}}{\{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\} \vdash p : \text{int}}}{\{p \rightarrow \text{int}, x \rightarrow \text{bool}\} \vdash \text{if}(x) p \text{ else } 0 : \text{int}} \\
\hline
\text{E-APPLI} \quad \frac{\text{E-IDENT} \quad \frac{f \rightarrow (\text{bool} \Rightarrow \text{int}) \in \{p \rightarrow \text{int}, f \rightarrow (\text{bool} \Rightarrow \text{int})\}}{\{p \rightarrow \text{int}, f \rightarrow (\text{bool} \Rightarrow \text{int})\} \vdash f : \text{bool} \Rightarrow t} \quad \text{E-VRAI} \quad \frac{\{\dots\} \vdash \text{true} : \text{bool}}{\{p \rightarrow \text{int}, f \rightarrow (\text{bool} \Rightarrow \text{int})\} \vdash f(\text{true}) : t}}{\{p \rightarrow \text{int}, f \rightarrow (\text{bool} \Rightarrow \text{int})\} \vdash f(\text{true}) : t}
\end{array}$$

Par E-IDENT dans  $X_2$ ,  $t = \text{int}$

## Exercice 2

$$\begin{array}{ccc}
\text{E-PAIR} & \text{E-PREM} & \text{E-SEC} \\
\frac{\Gamma \vdash e_1 : t_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : t_2}{\Gamma \vdash \langle e_1, e_2 \rangle : \ll t_1, t_2 \gg} & \frac{\Gamma \vdash e : \ll t_1, t_2 \gg}{\Gamma \vdash \text{fst } e : t_1} & \frac{\Gamma \vdash e : \ll t_1, t_2 \gg}{\Gamma \vdash \text{snd } e : t_2} \\
\\
\text{T-PAIR} & & \\
\frac{t_1 \diamond \quad t_2 \diamond}{\ll t_1, t_2 \gg \diamond} & & 
\end{array}$$

## Exercice 3

On commence par définir les notations suivantes.

Notation	Interprétation
$\bar{l} = \bar{e}$	$l_0 = e_0, \dots, l_n = e_n$ pour $n \in \mathbb{N} \wedge \forall i, j \in [0, n]. i \neq j \Rightarrow l_i \neq l_j$
$\bar{l} \rightarrow \bar{t}$	$l_0 \rightarrow t_0, \dots, l_n \rightarrow t_n$ pour $n \in \mathbb{N} \wedge \forall i, j \in [0, n]. i \neq j \Rightarrow l_i \neq l_j$

On définit ensuite les règles de sous-typage et de typage des expressions.

$$\begin{array}{c}
\text{S-INT} \\
\text{int} <: \text{int}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{S-BOOL} \\
\text{bool} <: \text{bool}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{S-FUN} \\
\frac{t_{d2} <: t_{d1} \quad t_{r1} <: t_{r2}}{(t_{d1} \Rightarrow t_{r1}) <: (t_{d2} \Rightarrow t_{r2})}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{S-REC} \\
\frac{\forall (l \rightarrow t_2) \in \bar{l}_2 \rightarrow \bar{t}_2 . (l \rightarrow t_1) \in \bar{l}_1 \rightarrow \bar{t}_1 \wedge t_1 <: t_2}{\ll \bar{l}_1 \rightarrow \bar{t}_1 \gg <: \ll \bar{l}_2 \rightarrow \bar{t}_2 \gg}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{T-SEL} \\
\frac{\forall (l \rightarrow t) \in (\bar{l} \rightarrow \bar{t}) . t \diamond}{\ll \bar{l} \rightarrow \bar{t} \gg \diamond}
\end{array}$$

Les autres règles pour les types restants identiques.

On finit par ajouter les règles de typage d'enregistrement et par modifier les autres règles d'expressions pour prendre en compte la notion de sous-typage.

$$\begin{array}{c}
\text{E-REC} \\
\frac{\forall (l = e) \in (\bar{l} = \bar{e}) . \Gamma \vdash e : t}{\Gamma \vdash < \bar{l} = \bar{e} > : \ll \bar{l} \rightarrow \bar{t} \gg}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{E-SEL} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \ll \bar{l} \rightarrow \bar{t} \gg \quad (l \rightarrow t) \in (\bar{l} \rightarrow \bar{t})}{\Gamma \vdash e.l : t}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{E-APPLI} \\
\frac{\Gamma \vdash e : (t_1 \Rightarrow t) \quad \Gamma \vdash e_1 : t_2 \quad t_2 <: t_1}{\Gamma \vdash e(e_1) : t}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{E-COND1} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \text{bool} \quad t_1 <: t_2 \quad \Gamma \vdash e_1 : t_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : t_2}{\Gamma \vdash \text{if}(e) e_1 \text{ else } e_2 : t_2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{E-COND2} \\
\frac{\Gamma \vdash e : \text{bool} \quad t_2 <: t_1 \quad \Gamma \vdash e_1 : t_1 \quad \Gamma \vdash e_2 : t_2}{\Gamma \vdash \text{if}(e) e_1 \text{ else } e_2 : t_1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{E-VAL} \\
\frac{\Gamma \vdash e_1 : t_{11} \quad t_{11} <: t_1 \quad x_1 \rightarrow t_1 \uplus \Gamma \vdash e : t \quad t_1 \diamond}{\Gamma \vdash (\text{val } x_1 : t_1 = e_1; e) : t}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\text{E-DEF} \\
\frac{x_2 \rightarrow t_2 \uplus \Gamma \vdash e_1 : t_{11} \quad t_{11} <: t_1 \quad x_1 \rightarrow (t_2 \Rightarrow t_1) \uplus \Gamma \vdash e : t \quad t_1 \diamond \quad t_2 \diamond}{\Gamma \vdash (\text{def } x_1(x_2 : t_2) : t_1 = e_1; e) : t}
\end{array}$$

Les autres règles pour les expressions restants identiques.