1 Définition d'un automate et déterminisation

Soit $\Sigma = \{ a, b \}$.

Soit A l'ensemble des mots de longueur supérieure à 1 tels que le premier et le dernier symbole sont identiques. Par exemple, $\{ bb, ababaaba \} \subseteq A$, mais $A \cap \{ abaab, a, \epsilon \} = \emptyset$.

1. Construire un AFN N qui accepte A.
2. Donner le graphe de transitions de N.
3. Déterminiser N par la construction des sous-ensembles.
4. Donner le graphe de transitions du résultat.

2 Définition d'un automate

Soit $\Sigma = \{ a, b \}$ et $A \subseteq \Sigma^*$. Si $x \in \Sigma^*$, alors $|x|$ dénote la longueur de x, et pour $1 \leq i \leq |x|$ nous dénotons par x_i le symbole à la $i^{\text{ème}}$ position de x.

Soit $\mathrm{D}(A)$, l'ensemble définit par :

$$\mathrm{D}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in A) \; \big(\; |x| = |y| \;\; \wedge \;\; (\exists\, 1 \leq k \leq |x|)\, (\forall\, 1 \leq i \leq |x|)\, (\, i \neq k \implies x_i = y_i \,) \big) \Big\}$$

Par définition, $\mathrm{D}(A)$ contient tous les mots x pour lesquels il existe un mot $y \in A$ qui diffère de x en *au plus* une position (la $k^{\text{ème}}$).

Notons que $A \subseteq \mathrm{D}(A)$.

Montrer : si A est régulier, alors $\mathrm{D}(A)$ est aussi régulier.

Plus précisement, pour un langage A donnée de manière abstraite :

1. Supposez que vous disposez un AF**D** $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ qui reconnaît $A \subseteq \Sigma^*$. (Par définition, un tel M peut être supposé pour tout langage A qui est régulier.)
2. *Adapter* M en un AF**N** $M' = (Q', \Sigma, \Delta, S, F')$ qui accepte $\mathrm{D}(A)$.

   Utiliser $Q' = Q \times \{ 0, 1 \}$ pour les états de M'. Dans un état $(p, f) \in Q'$, l'information $f \in \{ 0, 1 \}$ va enregistrer le nombre de différences déjà observées jusqu'à ce point de lecture entre le mot d'entrée et un mot acceptable par M.

   Définir $S, F', \Delta \ldots$
   Il peut être utile d'utiliser la notation $\overline{(\cdot)} : \Sigma \to \Sigma$ défini par $\overline{a} = b$ et $\overline{b} = a$.
3. Démontrer que $L(M') = \mathrm{D}(A)$.
   Aide : les lemmes suivants expriment formellement la relation entre M' et M.

   Lemme 1 *Pour tout x (avec $n = |x|$), et pour tout $(p, f) \in \widehat{\Delta}(S, x)$:*

   (a) si $f = 0$, alors $\widehat{\delta}(s, x) = p$;

   (b) si $f = 1$, alors $\exists 1 \leq k \leq n : \widehat{\delta}(s, x_1 \cdots x_{k-1} \overline{x_k} x_{k+1} \cdots x_n) = p$.

   Lemme 2 $L(M') = \mathrm{D}(L(M))$.

   Démontrer ces deux lemmes, et conclure avec $L(M') = \mathrm{D}(A)$.

3 Minimisation d'automate

Soit $M = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{a,b\}, \delta_M, 1, \{2,4,6\})$ et δ_M définie par :

δ_M	a	b
$S1$	1	2
$F2$	4	2
3	4	1
$F4$	4	3
5	1	4
$F6$	3	2

1. Donner le graphe de transitions de M.
2. Quels sont les états non-atteignables ?
3. Minimiser M, écrivez chaque étape de l'algorithme.
4. Convertir le langage résultant en une expression régulière (via le lemme d'Arden).

4 Kleene

Démontrer en utilisant les lois de Kleene que $(ab)^*a = a(ba)^*$.

5 Non-régularité

Montrer que le langage $\{x \in \{a,b,c\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} \wedge |x| = n^2\}$ n'est pas régulier.

1. Avec le lemme de gonflement.
2. (Avec les relations de Myhill-Nérode.)

6 Indécidabilité

En cours, nous avons défini

$$\text{FIN} = \{M \mid L(M) \text{ est fini }\}$$

et nous avons argumenté que FIN est non-r.e. (et que même $\overline{\text{FIN}}$ est non-r.e.).

Considérons,

$$\text{FINI} = \{(M,N) \mid L(M) \cap L(N) \text{ est fini }\}$$

Montrer — par réduction — que FINI n'est pas récursif.
C'est-à-dire :

1. Trouvez une fonction $\sigma : A \to B$ telle que soit FINI $\subseteq A$, soit FINI $\subseteq B$.
2. Montrer que cette fonction satisfait les propriétés requises par une réduction.

7 Fonctions récursives

Représenter les fonctions suivantes de type $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en fonction des schémas et exemples des fonctions partiellement récursives qui ont été donnés en cours :

1. $\mathbf{plus5}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 5$
2. $\mathbf{cbrt}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{x}$ (donc y si $y^3 = x$)
3. $\mathbf{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{x} + 5$