1. Manipulation d'expressions dans l'algèbre de Kleene $(X, 0, 1, ^*, \cdot, +, =)$

Démontrer que les relations suivantes sont vraies.

1. $x^* = (xx)^* (1 + x)$
2. $xy \leq y \Rightarrow x^* y \leq y$

Corrigé :

1. $x^* = (xx)^* (1 + x)$.
   On va démontrer que $x^* \leq (xx)^* (1 + x)$ et que $(xx)^* (1 + x) \leq x^*$. Donc, par la propriété d'anti-symmétrie de $\leq$, $x^* = (xx)^* (1 + x)$.
   On commence avec $x^* \leq (xx)^* (1 + x)$. Puisque on sait que $\beta + \gamma\alpha \leq \gamma \Rightarrow \beta\alpha^* \leq \gamma$, on pose $\alpha = x$, $\beta = 1$, $\gamma = (xx)^* (1 + x)$ dans l'expression précédente. On peut alors dire que $x^* \leq (xx)^* (1 + x)$ si on arrive à démontrer que $1 + (xx)^* (1 + x) x \leq (xx)^* (1 + x)$.

$$
\begin{array}{rcll}
1 + (xx)^* (1 + x) x & = & 1 + (xx)^* (x + xx) & \text{distributivité de } \cdot \\
 & = & 1 + (xx)^* x + (xx)^* xx & \text{distributivité de } \cdot \\
 & = & 1 + (xx)^* xx + (xx)^* x & \text{commutativité de } + \\
 & = & (1 + (xx)^* xx) + (xx)^* x & \text{associativité de } + \\
 & = & (xx)^* + (xx)^* x & 1 + \alpha^*\alpha = \alpha^* \\
 & = & (xx)^* (1 + x) & \text{distributivité de } \cdot \\
 & \leq & (xx)^* (1 + x) & \text{reflexivité de } \leq \\
 & & & \square
\end{array}
$$

   On continue avec $(xx)^* (1 + x) \leq x^*$. Puisque on sait que $\beta + \alpha\gamma \leq \gamma \Rightarrow \alpha^*\beta \leq \gamma$, on pose $\alpha = (xx)^*$, $\beta = 1 + x$, $\gamma = x^*$ dans l'expression précédente. On peut dire que $(xx)^* (1 + x) \leq x^*$ si on arrive à démontrer que $1 + x + (xx) x^* \leq x^*$.

$$
\begin{array}{rcll}
1 + x + (xx) x^* & = & 1 + x + xxx^* & \text{associativité de } \cdot \\
 & = & 1 + x (1 + xx^*) & \text{distributivité de } \cdot \\
 & = & 1 + xx^* & 1 + \alpha\alpha^* = \alpha^* \\
 & = & x^* & 1 + \alpha\alpha^* = \alpha^* \\
 & \leq & x^* & \text{reflexivité de } \leq \\
 & & & \square
\end{array}
$$

   On a montré que $x^* \leq (xx)^* (1 + x)$ mais aussi que $(xx)^* (1 + x) \leq x^*$. Alors, pour la propriété de anti-symmétrie de $\leq$, on peut affirmer que $x^* = (xx)^* (1 + x)$.

   Note :
   La technique qu'on a décrit jusqu'ici est utile pour résoudre de nombreux problèmes, toutefois, dans ce cas, la façon la plus rapide pour démontrer cette équation était :

$$
\begin{array}{rcll}
(xx)^* (1 + x) & = & (xx)^* + (xx)^* x & \text{distributivité de } \cdot \\
 & = & (xx)^* + x (xx)^* & \text{shifting} \\
 & = & x^* & \alpha^* = (\alpha\alpha)^* + \alpha (\alpha\alpha)^* \\
 & & & \square
\end{array}
$$

2. $xy \leq y \Rightarrow x^*y \leq y$
   Puisque on sait que $\beta + \alpha\gamma \leq \gamma \Rightarrow \alpha^*\beta \leq \gamma$, on pose $\beta = \gamma = y$ et $\alpha = x$ et on a que $y + xy \leq y \Rightarrow x^*y \leq y$. Maintenant la question deviens : est ce que $xy \leq y \Rightarrow y + xy \leq y$? On sait que $\alpha + \alpha = \alpha$, alors $y + xy \leq y = y + y$, mais la relation $\leq$ est monotone, donc $xy \leq y \Rightarrow y + xy \leq y + y = y$. Donc, on a prouvé que $xy \leq y \Rightarrow y + xy \leq y \Rightarrow x^*y \leq y$ et, par la transitivité de l'implications, on a que $xy \leq y \Rightarrow x^*y \leq y$.

   Note :
   Par définition :

$$\begin{array}{rcccrcl} xy & \leq & y & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & xy + y & = & y \\ x^*y & \leq & y & \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} & x^*y + y & = & y \end{array}$$

   On aurait aussi pu reformuler la question en :
   Démontrer que :

$$xy + y \;=\; y \;\Rightarrow\; x^*y + y \;=\; y$$

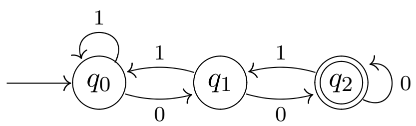
   Pour résoudre ça en utilisant le lemme d'Arden ($\beta = \alpha^*\gamma$ est une solution de $\beta = \alpha\beta + \gamma$), on tombe sur un autre problème intéressant.
   En fait, dans l'expression $y = xy + y$, on pourrait bien utiliser la distributivité de $\cdot$, obtenir $y = (x+1)\,y$ et puis poser $\beta = y$, $\alpha = x + 1$ et $\gamma = \epsilon$ pour appliquer le lemme d'Arden et obtenir $y = (x+1)^*$.
   Or, nous nous demandons s'il est possible d'utiliser le lemme d'Arden tout de suite en substituant β avec y , α avec x et γ avec y. Dans ce cas, on obtient $y = x^*y$ et, en appliquant encore une fois le lemme d'Arden avec $\beta = y$, $\alpha = x^*$ et $\gamma = \epsilon$ on a $y = (x^*)^* = x^*$.
   A première vue, x^* et $(x+1)^*$ sont différentes, mais on peut montrer qu'elles sont équivalentes.

$$\begin{array}{rcll} (x+1)^* & = & (1^*x)^*\,1^* & (\alpha^*\beta)^*\,\alpha^* \\ & = & x^* & \end{array}$$

   Alors, on peut dire que $y = x^*y$ est une solutione de $y = xy + y$ et donc, par la relfexivité de $\leq$, on peut aussi dir que $x^*y \leq y$.

2. Des automates aux expressions régulières

Étant donné l'AFD ci dessus (sur l'alphabet $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1\}$)



1. Donner le système d'équations décrivant les états ;
2. Donner l'expression régulière obtenue en substituant q_1 dans q_0 et en résolvant le système.
3. Donner l'expression régulière obtenue en résolvant d'abord q_0 en fonction de q_1 et résolvant le système.
4. Répondre aux questions suivantes :
   (a) Est ce que les expressions trouvées sont syntaxiquement égales ?
   (b) Démontrer qu'elles sont équivalentes.

Corrigé :

1. Système d'équations décrivant les états de l'automate :

$$\begin{cases} q_0 \equiv 1q_0 + 0q_1 \\ q_1 \equiv 1q_0 + 0q_2 \\ q_2 \equiv 1q_1 + 0q_2 + \epsilon \end{cases}$$

2. On substitue q_1 dans q_0 et on a :

$$\begin{array}{rcll} q_0 & \equiv & 1q_0 + 0\,(1q_0 + 0q_2) & \\ & \equiv & 1q_0 + 01q_0 + 00q_2 & \text{distributivité} \\ & \equiv & (1+01)\,q_0 + 00q_2 & \text{distributivité} \\ & \equiv & (1+01)^*\,00q_2 & \text{lemme d'Arden} \end{array}$$

On substitue le résultat obtenu pour q_0 dans q_1.

$$\begin{array}{rcll} q_1 & \equiv & 1\,(1+01)^*\,00q_2 + 0q_2 & \\ & \equiv & (1\,(1+01)^*\,00 + 0)\,q_2 & \text{distributivité} \end{array}$$

On substitue le résultat obtenu pour q_1 dans q_2.

$$\begin{array}{rcll} q_2 & \equiv & 1\,(1\,(1+01)^*\,00 + 0)\,q_2 + 0q_2 + \epsilon & \\ & \equiv & (1\,(1\,(1+01)^*\,00 + 0) + 0)\,q_2 + \epsilon & \text{distributivité} \\ & \equiv & (1\,(1\,(1+01)^*\,00 + 0) + 0)^* & \text{lemme de Arden} \end{array}$$

On substitue le résultat obtenu pour q_2 dans q_0.

$$q_0 \quad \equiv \quad (1+01)^*\,00\,(1\,(1\,(1+01)^*\,00 + 0) + 0)^*$$

3. On résout l'égalité pour q_0 en utilisant la lemme d'Arden :

$$q_0 \quad \equiv \quad 1^*0q_1$$

On substitue le résultat obtenu pour q_0 dans q_1.

$$\begin{array}{rcll} q_1 & \equiv & 11^*0q_1 + 0q_2 & \\ & \equiv & (11^*0)^*\,0q_2 & \text{lemme d'Arden} \end{array}$$

On substitue le résultat obtenu pour q_1 dans q_2.

$$\begin{array}{rcll} q_2 & \equiv & 1\,(11^*0)^*\,0q_2 + 0q_2 + \epsilon & \\ & \equiv & (1\,(11^*0)^*\,0 + 0)\,q_2 + \epsilon & \text{distributivité} \\ & \equiv & (1\,(11^*0)^*\,0 + 0)^* & \text{lemme d'Arden} \end{array}$$

On substitue le résultat obtenu pour q_2 dans q_1.

$$q_1 \quad \equiv \quad (11^*0)^*\,0\,(1\,(11^*0)^*\,0 + 0)^*$$

Et finalement, on substitue le résultat obtenu pour q_1 dans q_0.

$$q_0 \quad \equiv \quad 1^*0\,(11^*0)^*\,0\,(1\,(11^*0)^*\,0 + 0)^*$$

4. (a) Les deux expressions ne sont pas égales. On a obtenu :

$$\begin{array}{lll} q_0 & \equiv & (1+01)^*\,00\,(1\,(1\,(1+01)^*\,00+0)+0)^* \quad \text{dans 2.} \\ q_0 & \equiv & 1^*0\,(11^*0)^*\,0\,(1\,(11^*0)^*\,0+0)^* \quad \text{dans 3.} \end{array}$$

(b) Les axiomes qu'on a appliqués préservent les équivalences. En plus, la lemme d'Arden nous donne la $\leq$-plus petite solution de l'équation $x \equiv yx + z$. Alors il doit être possible de démontrer que les deux solutions sont équivalentes.
Si on examine les deux solutions, on peut voir que la première partie de chacune ($(1+01)^*\,0$ pour la première et $1^*0\,(11^*0)^*$ pour la deuxième) représente l'expression régulière de l'automate jusqu'à l'état q_1. On va d'abord démontrer l'équivalence entre celles-ci.

$$\begin{array}{rcll} 1^*0\,(11^*0)^* & \equiv & 1^*\,(011^*)^*\,0 & \text{shifting} \\ & \equiv & (1^*01)^*\,1^*0 & \text{shifting} \\ & \equiv & (1^*+01)^*\,0 & \text{denesting} \\ & & & \square \end{array}$$

Il faut encore montrer que les deux autres parties, $(1\,(1\,(1+01)^*\,00+0)+0)^*$ et $(1\,(11^*0)^*\,0+0)^*$, sont équivalentes.

$$\begin{array}{rcll} (1\,(1\,(1+01)^*\,00+0)+0)^* & \equiv & (1\,(11^*0\,(11^*0)^*\,0+0)+0)^* & \text{demontré avant} \\ & \equiv & (1\,(11^*0\,(11^*0)^*+\epsilon)\,0+0)^* & \text{distributivité} \\ & \equiv & (1\,(\epsilon+11^*0\,(11^*0)^*)\,0+0)^* & \text{commutativité} \\ & \equiv & (1\,(11^*0)^*\,0+0)^* & \epsilon+\alpha\alpha^* \equiv \alpha^* \\ & & & \square \end{array}$$