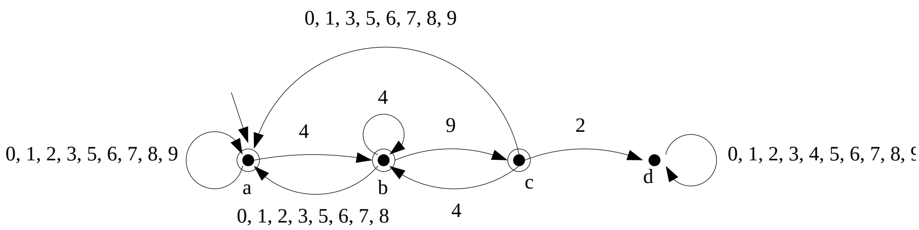
Automates & Calculabilité — Série 3 Corrigé — 03 nov 2003

1. Construction d'AFD

Pour chacun des langages suivants, donner la fonction de transition et le diagramme d'un AFD le reconnaissant.
Notation : S désigne l'état initial et F désigne un état final.

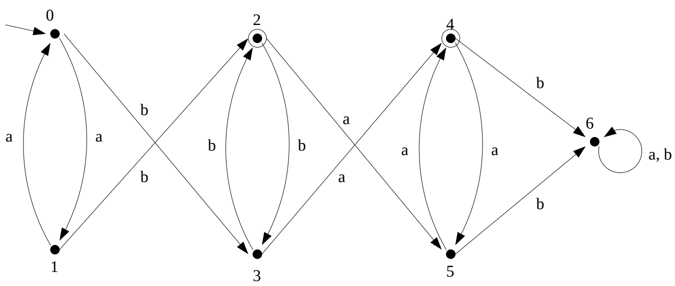
1. L'ensemble des mots de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^*$ qui ne contiennent pas le sous-mot 492.
   Corrigé :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
SF a	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a
F b	a	a	a	a	b	a	a	a	a	c
F c	a	a	d	a	b	a	a	a	a	a
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d



2. L'ensemble des mots de $\{a, b\}^*$ qui sont de la forme $a^n b^m a^r$ avec $n + m + r$ pair et $m \geq 1$.
   Corrigé :

	a	b
S 0	1	3
1	0	2
F 2	5	3
3	4	2
F 4	5	6
5	4	6
6	6	6



2. Produit d'AFD

Pour la paire d'AFD suivants, utiliser la construction du produit d'automates pour obtenir l'AFD qui accepte (a) l'intersection et (b) l'union des ensembles acceptés par chacun de ces automates. S désigne l'état initial et F désigne un état final.

	a	b
S1	2	3
F2	3	1
F3	1	2

	a	b
SF1	3	2
2	1	3
F3	2	1

Corrigé :

Intersection

	a	b
S 1 1	2 3	3 2
1 2	2 1	3 3
1 3	2 2	3 1
F 2 1	3 3	1 2
2 2	3 1	1 3
F 2 3	3 2	1 1
F 3 1	1 3	2 2
3 2	1 1	2 3
F 3 3	1 2	2 1

Union

	a	b
SF 1 1	2 3	3 2
1 2	2 1	3 3
F 1 3	2 2	3 1
F 2 1	3 3	1 2
F 2 2	3 1	1 3
F 2 3	3 2	1 1
F 3 1	1 3	2 2
F 3 2	1 1	2 3
F 3 3	1 2	2 1

3. Mot miroir

Étant donné le mot x sur un alphabet Σ, l'inverse de x est dénoté par x^I . La définition est :

i. Si $|x| = 0$ alors $x^I \stackrel{\text{def}}{=} x$, à savoir $\epsilon^I = \epsilon$.

ii. Si $|x| > 0$, alors $x = ya$ pour un certain $a \in \Sigma$, et $x^I \stackrel{\text{def}}{=} ay^I$.

Preuves par induction :

1. Montrer par induction sur la longueur de y que, quels que soient les mots $x, y \in \Sigma^*$, $(xy)^I = y^I x^I$.
2. Montrer par induction sur la longueur de x que, quel que soit le mot $x \in \Sigma^*$, $(x^I)^I = x$.

Corrigé :

On a besoin du lemme suivant :

Lemme
Pour tout $y \in \Sigma^+$, il existe $z \in \Sigma^*$ et $a \in \Sigma$ tels que $y = za$.
Preuve :
On rappelle la définition de mot (Session 2 page 21) :
$\Sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\epsilon\} \cup \{w \mid w = a_1 a_2 ... a_n \wedge n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \Sigma\}$

Pour définition, $y \in \Sigma^+$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 0$ et il existe $a_1, a_2, ..., a_n$ avec $a_i \in \Sigma$ tel que $y = a_1 a_2 ... a_n$.
Prenons $y \in \Sigma^+$ quelconque, nous avons qu'il existe $n > 0$ et $y = a_1 a_2 ... a_n$.
Posons :
$z \stackrel{\text{def}}{=} a_1 a_2 ... a_{n-1}$ et $a \stackrel{\text{def}}{=} a_n$
Alors :
$y = za$ et $|z| = |y| - 1$

$\square$

1. Montrer par induction sur la longueur de y que, quels que soient les mots $x, y \in \Sigma^*$, $(xy)^I = y^I x^I$.

   – $|y| = 0$
   $\Rightarrow y = \epsilon \Rightarrow (x\epsilon)^I = (x)^I = (\epsilon x)^I$
   – $|y| = n + 1 > 0$
   On suppose que pour chaque $z \in \Sigma^*$ avec $|z| = n$, $(xz)^I = z^I x^I$.
   Du lemme précédent on sait que pour tout $y \in \Sigma^*$ tel que $|y| = n + 1$ il existe $a \in \Sigma$ et $z \in \Sigma^*$ tels que $|z| = n$ et $y = za$. Alors :

$$
\begin{array}{rcll}
(xy)^I & = & (xza)^I & y = za \\
& = & (wa)^I & \text{on pose } xz = w \\
& = & aw^I & \text{définition ii de l'inverse applique à } wa \\
& = & a\,(xz)^I & w = xz \\
& = & az^I x^I & \text{hypothèse d'induction} \\
& = & \left(az^I\right) x^I & \text{concaténation est associative} \\
& = & y^I x^I & \text{définition ii de l'inverse applique à } y = za
\end{array}
$$

2. Montrer par induction sur la longueur de x que, quel que soit le mot $x \in \Sigma^*$, $(x^I)^I = x$.

   – $|x| = 0$
   $\Rightarrow x = \epsilon \Rightarrow (\epsilon^I)^I = (\epsilon)^I = \epsilon$
   – $|x| = n + 1 > 0$
   On suppose que pour chaque $z \in \Sigma^*$, avec $|z| = n$, $(z^I)^I = x$.
   Du lemme précédent on sait que pour tout $x \in \Sigma^*$ tel que $|x| = n + 1$ il existe $a \in \Sigma$ et $z \in \Sigma^*$ tels que $|z| = n$ et $x = za$. Alors :

$$
\begin{array}{rcll}
\left(x^I\right)^I & = & \left((za)^I\right)^I & x = za \\
& = & \left(az^I\right)^I & \text{définition ii de l'inverse applique à } za \\
& = & (yw)^I & \text{on pose } z^I = w \text{ and } a = y \\
& = & w^I y^I & \text{résultat de l'exercice 3.1} \\
& = & \left(z^I\right)^I a^I & w = z^I \text{ et } y = a \\
& = & \left(z^I\right)^I a & \text{définition i de l'inverse applique à } a \\
& = & za & \text{hypothèse d'induction} \\
& = & x & za = x
\end{array}
$$