1. Stratégies de preuves

Par construction Montrer qu'il existe un ordre partiel qui n'est pas total.

Par exemple, posons $X \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2\}$ et $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{(1, 1), (2, 2)\}$. $(X, \mathcal{S})$ est un ordre partiel (reflexif, transitif, anti-symmetrique), mais pas total (ni $1\ \mathcal{S}\ 2$ ni $2\ \mathcal{S}\ 1$ ou $2 = 1$).

Par l'absurde Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Supposons le contraire. Alors il existe $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+$ tels que $m/n = \sqrt{2}$. Posons $g \stackrel{\text{def}}{=} \text{PGDC}(m, n)$, $m_1 \stackrel{\text{def}}{=} m/g$ et $n_1 \stackrel{\text{def}}{=} n/g$. Notons que $m_1/n_1 = m/n = \sqrt{2}$ et que $\text{PGDC}(m_1, n_1) = 1$.

Multiplions par n_1: $m_1 = n_1\sqrt{2}$, et élevons au carré: $m_1^2 = n_1^2 \cdot 2$. Comme 2 divise la partie droite de l'équation, nous avons que 2 divise aussi la partie gauche, donc 2 divise aussi m_1^2. Comme 2 est un nombre premier, 2 divise m_1.

Nous pouvons alors poser $m_1 = 2 \cdot m_2$, d'où $(2 \cdot m_2)^2 = n_1^2 \cdot 2$. Après division par 2, nous avons $2 \cdot m_2^2 = n_1^2$. Comme 2 divise la partie gauche de l'équation, nous avons que 2 divise aussi la partie droite, donc 2 divise aussi n_1^2. Comme 2 est un nombre premier, 2 divise n_1.

Dès lors m_1 et n_1 sont divisibles par 2, donc $\text{PGDC}(m_1, n_1)$ l'est aussi. Mais nous avons supposé que $\text{PGDC}(m_1, n_1) = 1$, ce qui est une contradiction car 1 n'est pas divisible par 2.

Par analyse des cas Montrer que $n^2 + n$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons deux cas: n pair ou n impair.

1. Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2k)^2 + 2k \\ &= 2(2k^2 + k), \end{aligned}$$

   qui est pair.

2. Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors

$$\begin{aligned} n^2 + n &= (2k + 1)^2 + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 1), \end{aligned}$$

   qui est pair.

Par induction Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^3.$$

Posons $P(k)$ comme l'équation précédente.

$P(0)$ est vrai, comme toute somme vide est 0 par définition.

Supposons que $P(k_0)$ est vrai. Nous avons

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k_0+1} i\right)^2 &= \left(k_0 + 1 + \sum_{i=1}^{k_0} i\right)^2 \\
&= (k_0+1)^2 + 2(k_0+1)\left(\sum_{i=1}^{k_0} i\right) + \left(\sum_{i=1}^{k_0} i\right)^2 \\
&= (k_0+1)^2 + 2(k_0+1)\left(\sum_{i=1}^{k_0} i\right) + \sum_{i=1}^{k_0} i^3 \\
&= (k_0+1)^2 + 2(k_0+1)\left(\frac{k_0(k_0+1)}{2}\right) + \sum_{i=1}^{k_0} i^3 \\
&= (k_0+1)^3 + \sum_{i=1}^{k_0} i^3
\end{aligned}$$

Par conséquent $\forall k \in \mathbb{N} \,.\, P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Par induction $\forall k \in \mathbb{N} \,.\, P(k)$.

2. La structure d'une preuve

Décrire la structure de la preuve du théorème de Cantor $|A| < |2^A|$ pour A non vide.

- Preuve par *construction* d'un surjection $2^A \to A$: En particulier, $\{a\} \mapsto a$.
- Nous pouvons *dériver* la non-existence d'une bijection $2^A \to A$ de la non-existence d'une surjection $A \to 2^A$.
  Preuve par *contre-exemple*: Étant donnés une $f : A \to 2^A$ quelconque, nous construisons $S \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid b \notin f(a)\}$. Puis nous montrons que $\neg\exists a \in A$ tel que $f(a) = S$.
  Preuve par *l'absurde*: supposons un tel a. Nous procédons par *analyse des cas*:

  $a \in f(a)$: Par la définition de S nous avons $a \notin S = f(a)$; absurde.

  $a \notin f(a)$: Par la définition de S nous avons $a \in S = f(a)$; absurde.

3. L'ordre alphabétique v.s. l'ordre lexicographique

Aurait-on pu utiliser l'ordre alphabétique de la même manière que l'ordre lexicographique pour définir une bijection $A^* \to \mathbb{N}$ (Session 1)? Pourquoi?

Non, sauf si A ne contient qu'un seul element.

Si $a, b \in A$ tels que $a \prec b$, alors $\{w \mid w \ll_{\mathrm{d}} b\}$ est infini, comme il contient tous les mots commençant par a. Dès lors *lpp*(b) n'est pas bien défini.