

## 1. Calculabilité

1. Cochez les cases valides ci-dessous (plusieurs réponses sont possibles). Ne vous contentez pas des réponses, justifiez les en vous replongeant dans le cours (définitions, théorèmes, etc).

- |   |  |
|---|--|
| (a) Un langage régulier est,<br><input checked="" type="checkbox"/> récursif<br><input checked="" type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input type="checkbox"/> ni récursif, ni r.e.   | et le problème qu'il caractérise est,<br><input checked="" type="checkbox"/> décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> semi-décidable<br><input type="checkbox"/> indécidable |
| (b) Le langage reconnu par un AFD est,<br><input checked="" type="checkbox"/> régulier<br><input checked="" type="checkbox"/> récursif<br><input checked="" type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input type="checkbox"/> ni régulier, ni récursif, ni r.e.  | et le problème qu'il caractérise est,<br><input checked="" type="checkbox"/> décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> semi-décidable<br><input type="checkbox"/> indécidable |
| (c) Le langage sur $\{a, b\}$ défini par $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ est,<br><input type="checkbox"/> régulier<br><input checked="" type="checkbox"/> récursif<br><input checked="" type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input type="checkbox"/> ni régulier, ni récursif, ni r.e.                    | et le problème qu'il caractérise est,<br><input checked="" type="checkbox"/> décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> semi-décidable<br><input type="checkbox"/> indécidable |
| (d) Le langage sur $\{a, b\}$ défini par $\{a^n a^n \mid n \geq 0\}$ est,<br><input checked="" type="checkbox"/> régulier<br><input checked="" type="checkbox"/> récursif<br><input checked="" type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input type="checkbox"/> ni régulier, ni récursif, ni r.e.         | et le problème qu'il caractérise est,<br><input checked="" type="checkbox"/> décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> semi-décidable<br><input type="checkbox"/> indécidable |
| (e) Le langage sur $\{0, 1, \#\}$ défini par $\{[M]\#[x] \mid M \text{ s'arrête avec } x\}$ est,<br><input type="checkbox"/> régulier<br><input type="checkbox"/> récursif<br><input checked="" type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input type="checkbox"/> ni régulier, ni récursif, ni r.e.        | et le problème qu'il caractérise est,<br><input type="checkbox"/> décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> semi-décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> indécidable |
| (f) Le langage sur $\{0, 1, \#\}$ défini par $\{[M]\#[x] \mid M \text{ ne s'arrête pas avec } x\}$ est,<br><input type="checkbox"/> régulier<br><input type="checkbox"/> récursif<br><input type="checkbox"/> récursivement énumérable<br><input checked="" type="checkbox"/> ni régulier, ni récursif, ni r.e. | et le problème qu'il caractérise est,<br><input type="checkbox"/> décidable<br><input type="checkbox"/> semi-décidable<br><input checked="" type="checkbox"/> indécidable            |

(g) Soit  $L$  le langage qui caractérise un problème  $P$ .

Si  $P$  est décidable alors il existe

- un AFD  $A$  avec  $L(A) = L$
- un AFN  $A$  avec  $L(A) = L$
- une expr. reg.  $\alpha$  avec  $L(\alpha) = L$
- une MdT  $T$  totale avec  $L(T) = L$
- une MdT  $T$  avec  $L(T) = L$

Si  $P$  est semi-décidable alors il existe

- un AFD  $A$  avec  $L(A) = L$
- un AFN  $A$  avec  $L(A) = L$
- une expr. reg.  $\alpha$  avec  $L(\alpha) = L$
- une MdT  $T$  totale avec  $L(T) = L$
- une MdT  $T$  avec  $L(T) = L$

2. Quelles sont les relations (ensemblistes) entre l'ensemble des langages réguliers  $LR$ , récursifs  $R$ , et récursivement énumérables  $RE$  ?

$$LR \subset R \subset RE$$

3. Quelles sont les relations (ensemblistes) entre l'ensemble  $L_{AFD}$  des langages acceptés par l'ensemble des AFD, l'ensemble  $L_{AFN}$  des langages acceptés par l'ensemble des AFN, l'ensemble  $L_{REGEXP}$  des langages décrits par l'ensemble des expressions régulières, l'ensemble des langages  $L_{MTT}$  acceptés par l'ensemble des MdT totales, et l'ensemble des langages  $L_{MT}$  acceptés par l'ensemble des MdT ?

$$L_{AFD} = L_{AFN} = L_{REGEXP} \subset L_{MTT} \subset L_{MT}$$

## 2. $\mu$ -recursion

Définissez les fonctions suivantes dans le cadre des fonctions  $\mu$ -récursives (vous pouvez utiliser les fonctions mult et add vues au cours).

$$\text{fact}(x) \stackrel{\text{def}}{=} x!$$

$$\text{exp}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x^y$$

La fonction suivante qui calcule la factorielle est primitive récursive (de par sa forme et par le fait que mult est primitive récursive).

$$\begin{aligned} f() &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Comp}(s, (z))(0) && (= s(z(0))) \\ \text{fact}(0) &\stackrel{\text{def}}{=} f() \\ g(x, y) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Comp}(\text{mult}, (\mathbf{Comp}(s, \pi_1^2), \pi_2^2)) && (= \text{mult}(s(x), y)) \\ \text{fact}(x+1) &\stackrel{\text{def}}{=} g(x, \text{fact}(x)) \\ \text{fact} &= \mathbf{PrRec}_0(f, g) \end{aligned}$$

La fonction suivante qui calcule l'exponent d'un nombre est primitive récursive (de par sa forme et par le fait que mult est primitive récursive)

$$\begin{aligned} f(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Comp}(s, (z))(x) && (= s(z(x))) \\ \text{exp}(x, 0) &\stackrel{\text{def}}{=} f(x) \\ g(x, y, z) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Comp}(\text{mult}, (\pi_1^3, \pi_3^3)) && (= \text{mult}(x, z)) \\ \text{exp}(x, y+1) &\stackrel{\text{def}}{=} g(x, y, \text{exp}(x, y)) \\ \text{exp} &= \mathbf{PrRec}_1(f, g) \end{aligned}$$