Automates & Calculabilité — Corrigé Série 10 — 5 jan 2004

1. Exemples de machines de Turing

1. Donner une définition formelle d'une machine de Turing reconnaissant le langage des palindromes sur un alphabet Σ.
2. Donner une description informelle d'une machine de Turing avec alphabet d'entrée $\{a\}$ qui étant donné $\vdash a^n \sqcup^\omega$, accepte avec $\vdash a^{n^2} \sqcup^\omega$ sur le ruban.

Corrigé :

1. L'idée est de reconnaître un palindrome en comparant la première et la dernière lettre. Si elles sont égales, nous les effaçons et recommençons. Sinon, nous rejetons le mot. Nous acceptons le mot vide et tout mot à une lettre.

   Posons $M \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \sqcup, \delta, s, t, r)$ où

$$
\begin{array}{rcl}
Q & \stackrel{\text{def}}{=} & \{d_x, e_x \mid x \in \Sigma\} \cup \{g, c, s, t, r\} \\
\Gamma & \stackrel{\text{def}}{=} & \Sigma \cup \{\vdash, \sqcup\} \\
\delta(p, x) & \stackrel{\text{def}}{=} & \begin{cases}
(t, x, R) & \text{si } p = t, \\
(r, x, R) & \text{si } p = r, \\
(c, x, R) & \text{si } p = s, \\
(d_x, \sqcup, R) & \text{si } p = c \text{ et } x \in \Sigma, \\
(t, x, R) & \text{si } p = c \text{ et } x \notin \Sigma, \\
(d_y, x, R) & \text{si } p = d_y \text{ et } x \in \Sigma, \\
(e_y, x, L) & \text{si } p = d_y \text{ et } x \notin \Sigma, \\
(g, \sqcup, L) & \text{si } p = e_y,\ x \in \Sigma \text{ et } x = y, \\
(r, x, R) & \text{si } p = e_y,\ x \in \Sigma \text{ et } x \neq y, \\
(t, x, R) & \text{si } p = e_y \text{ et } x \notin \Sigma, \\
(g, x, L) & \text{si } p = g \text{ et } x \in \Sigma, \\
(c, x, R) & \text{si } p = g \text{ et } x \notin \Sigma.
\end{cases}
\end{array}
$$

   Intuitivement, les états peuvent être décrits comme suit :

   g Nous cherchons le début du mot.

   c Nous avons trouvé le début du mot.

   d_a La première lettre était a. Nous cherchons le fin du mot.

   e_a La première lettre était a. Nous avons trouvé le fin du mot.

2. L'idée de cette machine est d'utiliser deux marqueurs différentes : $\bar{\cdot}$ et $\cdot'$, pour compter 1) le nombre de fois que le mot a^n a été recopié, et 2) le nombre de lettres du mot copiés à l'itération courante.

   Posons $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, a', \overline{a}, \overline{a}', b, \vdash, \sqcup\}$ comme alphabet de ruban.

   (a) Changer le premier a sur le ruban en $\overline{a}$. S'il n'y en a pas avant le premier $\sqcup$, acceptons.

   (b) Changer le premier a sur le ruban en $\overline{a}$. S'il n'y en a pas avant le premier b, goto (h).

(c) Changer le premier $x \in \{a, \overline{a}\}$ sur le ruban en x'. S'il n'y en a pas avant le premier b, goto (f).

(d) Changer le premier $\llcorner\!\lrcorner$ sur le ruban en b.

(e) goto (c)

(f) Changer tous les $x' \in \{a', \overline{a}'\}$ avant le premier b sur le ruban en x.

(g) goto (b)

(h) Changer tous les $x \in \{a', \overline{a}, \overline{a}', b\}$ avant le premier $\llcorner\!\lrcorner$ sur le ruban en a.

(i) Accepter.

2. Correspondance AFD $\longrightarrow$ MdT

Définir une fonction AFD $\longrightarrow$ MdT qui, étant donné un AFD $A \stackrel{\text{def}}{=} (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, donne un MdT A' qui accepte $L(A)$ et rejette $\Sigma^* \setminus L(A)$. Prouver que la fonction satisfait cette propriété.

Corrigé : Nous transformons l'AFD A en MdT $A' \stackrel{\text{def}}{=} (Q', \Sigma, \Gamma, \vdash, \llcorner\!\lrcorner, \delta', s', t, r)$ où

$$
\begin{aligned}
Q' &\stackrel{\text{def}}{=} Q \cup \{s', t, r\} \\
\Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \cup \{\vdash, \llcorner\!\lrcorner\} \\
\delta'(p, x) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (\delta(p,x), x, R) & \text{si } p \in Q \text{ et } x \in \Sigma, \\ (t, x, R) & \text{si } p \in F \text{ et } x \notin \Sigma, \\ (r, x, R) & \text{si } p \in Q \setminus F \text{ et } x \notin \Sigma, \\ (s, x, R) & \text{si } p = s', \\ (t, x, R) & \text{si } p = t, \\ (r, x, R) & \text{si } p = r. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lemme 1. *Pour tout $v, w \in \Sigma^*$, $(s', \vdash vw\llcorner\!\lrcorner^\omega, 0) \rightarrow_{A'}^{|v|+1} (\widehat{\delta}(s,v), \vdash vw\llcorner\!\lrcorner^\omega, |v|+1)$*

Démonstration. Par induction sur v.

Cas de base : $v = \epsilon$. Comme $(\vdash vw\llcorner\!\lrcorner^\omega)_1 = \vdash$ et $\delta'(s', \vdash) = (s, \vdash, R)$ nous avons $(s', \vdash w\llcorner\!\lrcorner^\omega, 0) \rightarrow_{A'}^{1} (s, \vdash w\llcorner\!\lrcorner^\omega, 1)$. Par définition $s = \widehat{\delta}(s, \epsilon)$.

Cas inductive : $v = ul$ avec $u \in \Sigma^*, l \in \Sigma$. Par induction, $(s', \vdash ulw\llcorner\!\lrcorner^\omega, 0) \rightarrow_{A'}^{|u|+1} (\widehat{\delta}(s,v), \vdash ulw\llcorner\!\lrcorner^\omega, |u|+1)$. Notons que $|v| = |u|+1$ et que $(\vdash ulw\llcorner\!\lrcorner^\omega)_{|u|+1} = l$. Comme $\delta'(\widehat{\delta}(s,u), l) = (\delta(\widehat{\delta}(s,u), l), l, R) = (\widehat{\delta}(s, ul), l, R)$ nous avons $(s', ulw, 0) \rightarrow_{A'}^{|v|+1} (\widehat{\delta}(s, ul), ulw, |v|+1)$. □

Proposition 1. *A' accepte $L(A)$ et rejette $\Sigma^* \setminus L(A)$.*

Démonstration. Prenons un mot quelconque $v \in \Sigma^*$. La machine est lancée avec $\vdash v\llcorner\!\lrcorner^\omega$ sur le ruban, avec la tête à $\vdash$. Par Lemme 1, après $|v|+1$ pas la machine est dans l'état $\widehat{\delta}(s,v)$, avec $\llcorner\!\lrcorner$ sous la tête. Nous avons deux cas :

1. Si $v \in L(A)$ alors $\widehat{\delta}(s,v) \in F$, et la machine accepte au prochain pas, étant donné que $\delta'(\widehat{\delta}(s,v), \llcorner\!\lrcorner) = (t, \llcorner\!\lrcorner, R)$ atteint l'état accepteur.
2. Si $v \notin L(A)$ alors $\widehat{\delta}(s,v) \notin F$, et la machine rejette au prochain pas, étant donné que $\delta'(\widehat{\delta}(s,v), \llcorner\!\lrcorner) = (r, \llcorner\!\lrcorner, R)$ atteint l'état réjetteur.

□