Exercice 1

Dans cet exercice, nous allons utiliser deux lemmes sur les propriétés des ensembles et des relations d'ordre. Ces lemmes, dont nous ne donnons pas la preuve, peuvent être démontrés en utilisant les définitions, règles et axiomes de la théorie des ensembles. Ci-dessous, nous notons $\|A\|$ le nombre d'éléments appartenant à l'ensemble fini A.

Lemme 1.1 *Étant donné deux ensembles finis A et B, on a*

$$A \subset B \Rightarrow \|A\| < \|B\|$$

□

Lemme 1.2 *Étant donné un ordre total sur un ensemble A. On a pour tout x_1, x_2 dans A,*

$$(x_1 < x_2) \vee (x_1 > x_2) \vee (x_1 = x_2) \tag{1}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \{x \mid x < x_1\} \subset \{x \mid x < x_2\} \tag{2}$$

□

Le programme d'un langage sur un alphabet fini A est représenté par une chaîne finie $w \in A^*$. Nous supposons que l'ordre lexicographique est défini en fonction d'une relation d'ordre totale et stricte sur l'alphabet A. La fonction *lpp* associe à chaque chaîne w le nombre de chaînes qui lui sont lexicographiquement plus petites. Elle est définie par

$$\begin{aligned} lpp: \quad & A^* \to \mathbb{N} \\ & w \mapsto \|\{w' \mid w' < w\}\| \end{aligned}$$

La fonction *lpp* est une bijection.

Preuve. Pour démontrer que *lpp* est une bijection, nous commençons d'abord par montrer (1) qu'elle est injective, puis (2) qu'elle est surjective.

1. *lpp* est injective.
   Par définition de l'injection, nous devons montrer la proposition suivante

   $$\forall w_1, w_2 \in A^* \quad w_1 \neq w_2 \Rightarrow lpp(w_1) \neq lpp(w_2)$$

   Prenons deux programmes w_1 et w_2 et supposons qu'ils sont différents, $w_1 \neq w_2$. Nous souhaitons démontrer que $lpp(w_1) \neq lpp(w_2)$. Étant donné que l'ordre est total, nous avons par la première propriété du lemme 1.2

   $$w_1 \neq w_2 \Rightarrow (w_1 < w_2) \vee (w_1 > w_2) \qquad \text{(lemme 1.2.1)}$$

   Posons $L(w) = \{w' \mid w' < w\}$. Par la second propriété du lemme 1.2,

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \big(L(w_1) \subset L(w_2)\big) \vee \big(L(w_1) \supset L(w_2)\big) && \text{(lemme 1.2.2)} \\ &\Rightarrow \big(\|L(w_1)\| < \|L(w_2)\|\big) \vee \big(\|L(w_1)\| > \|L(w_2)\|\big) && \text{(lemme 1.1)} \\ &\Rightarrow \big(lpp(w_1) < lpp(w_2)\big) \vee \big(lpp(w_1) > lpp(w_2)\big) && \text{(définition de } lpp\text{)} \end{aligned}$$

   La relation d'ordre $<$ sur les nombres naturels étant totale et stricte, la dernière proposition ne signifie rien d'autre que $lpp(w_1) \neq lpp(w_2)$.

2. *lpp* est surjective.
   Par définition de la surjection, nous voulons démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists w \in A^* \quad lpp(w) = n$$

   C'est à dire que pour tout nombre naturel n nous devrions être capable d'exhiber un programme w dont le nombre d'éléments lexicographiquement plus petits que celui ci est égal à n.
   L'alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ étant fini, nous pouvons construire une séquence (infinie) de tous les programmes sur A ordonnés lexicographiquement. Nous notons S cette séquence et S_n son n-ème élément ($n \in \mathbb{N}$).

$$\begin{array}{rllll} S = & \epsilon, & & & \\ & a_1, & a_2, & \ldots & a_n, \\ & a_1 \cdot a_1, & a_1 \cdot a_2, & \ldots & a_1 \cdot a_n \\ & \vdots & & & \\ & a_n \cdot a_1, & a_n \cdot a_2, & \ldots & a_n \cdot a_n \\ & a_1 \cdot a_1 \cdot a_1, & \ldots & & \end{array}$$

   Nous avons donc $S_0 = \epsilon$, $S_1 = a_1$, ... Une des propriétés de cette séquence est que les m éléments qui précédent l'élément S_m de la séquence sont tous les programmes lexicographiquement plus petits que S_m. En d'autres termes[1]

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \bigcup_{n<m} \{S_n\} = \{w \mid w < S_m\}$$

   Étant donné que ce sont exactement m éléments qui précédent l'élément S_m de la séquence S nous avons

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \|\bigcup_{n<m} \{S_n\}\| = m = \|\{w \mid w < S_m\}\| = lpp(S_m)$$

   Pour tout $m \in \mathbb{N}$ nous sommes donc capables d'exhiber un programme w tel que $lpp(w) = m$: ce programme est l'élément S_m de la séquence S, ce qui démontre que la fonction est surjective.
   Notons qu'il y a une subtilité ici. Si l'ordre sur l'alphabet A est total mais non strict, chaque chaîne est lexicographiquement plus petite qu'elle même : $\forall w \in A^* \quad w < w$. Dans ce cas nous avons le problème que $lpp(w)$ est toujours supérieur ou égal à 1 et il n'est pas possible de trouver w tel que $lpp(w) = 0$ et la fonction n'est alors pas surjective. C'est pourquoi dans l'introduction du problème ci-dessus nous posons la contrainte que l'ordre sur l'alphabet est total et strict.

Par (1) et (2) nous déduisons que *lpp* est bijective.
■

Exercice 2

Dans cet exercice nous allons utiliser le lemme suivant, qui découle de la définition de la bijection.

[1] N.B. Pour démontrer formellement cette propriété, il faudrait donner une caractérisation constructive de S et S_n et raisonner par récurrence sur n.

Lemme 2.3 *S'il existe une fonction bijective $f : A \to B$ alors il existe une fonction bijective $g : B \to A$.*
$\square$

Nous souhaitons prouver le théorème suivant.

Théorème 2.4 *Étant donné un ensemble A non vide et l'ensemble des parties de A, noté 2^A, nous avons*

$$|A| < |2^A|$$

$\square$

Preuve. Par définition de la cardinalité, nous devons montrer (1) qu'il existe une surjection de 2^A dans A (2) qu'il n'existe pas de bijection de 2^A dans A, pour A non vide.

1. Il existe un surjection de 2^A dans A.
   Définissons la fonction f suivante avec $c \in A$,

   $$\begin{aligned} f : \quad 2^A &\to A \\ \{a\} &\mapsto a \\ B &\mapsto c \quad \text{if } B \notin \big\{\{x\} \mid x \in A\big\} \end{aligned}$$

   Cette fonction associe aux ensembles constitués d'un unique élément $a \in A$ cet élément a et associe un élément distingué c de A à tous les autres ensembles. Par définition de f, nous avons

   $$\forall a \in A \quad f(\{a\}) = a \qquad\qquad \text{(par déf. de f)}$$

   cela implique que

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall a \in A \quad \exists B \in 2^A \quad f(B) = a \\ &\Rightarrow f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

   Nous avons donc trouvé une surjection de 2^A dans A.
2. Il n'existe pas de bijection de 2^A dans A.
   Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f : 2^A \to A$ qui est bijective. Par le lemme 2.3 cela signifie qu'il existe une fonction bijective $g : A \to 2^A$. La fonction g étant surjective, nous avons

   $$\forall B \in 2^A \quad \exists a \in A \quad g(a) = B$$

   Définissons $S \subseteq A$ tel que $S = \{a \mid a \in A \wedge a \notin g(a)\}$. Étant donné que S est un sous-ensemble de A, S appartient à 2^A. Dès lors, par la surjectivité de g nous avons,

   $$\exists b \in A \quad g(b) = S$$

   Considérons l'appartenance de b à S. Soit b est dans S, soit il ne l'est pas. Supposons que,
   (a) $b \in S$. Par définition de S nous avons $b \notin g(b)$. Cependant étant donné que $g(b) = S$, cela signifie que $b \notin S$ ce qui contredit l'hypothèse.
   (b) $b \notin S$. Étant donné que $g(b) = S$ nous avons $b \notin g(b)$. Cependant par définition de S cela signifie que $b \in S$ ce qui contredit l'hypothèse.

   Dans les deux cas nous sommes arrivés à une contradiction. Nonobstant, l'un de deux cas devrait être vrai. Cela signifie que notre hypothèse de départ est fausse et qu'il n'existe pas de bijection de 2^A dans A.

De (1) et (2) nous déduisons que $|A| < |2^A|$ pour tout A différent de l'ensemble vide. $\blacksquare$