Exercice 3

La fonction c est une fonction qui associe à une fonction sur les nombres naturels son image. c est donc une fonction qui prend des fonctions en argument (une fonction qui prend en argument des fonction ou qui retourne des fonctions est dite « d'ordre supérieur »). Nous l'avons définie comme suit,

$$\begin{aligned} c: \quad & (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to 2^{\mathbb{N}} \\ & f \mapsto \mathsf{image}(f) \end{aligned}$$

1. La fonction c n'est pas surjective.
   Preuve. Pour être surjective, c doit satisfaire la proposition suivante :

   $$\forall B \in 2^{\mathbb{N}} \quad \exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c(f) = B$$

   Nous démontrons avec un contre-exemple que c n'est pas surjective. Cet exemple est donné par $B = \emptyset$. En effet dans ce cas, par la définition même des fonctions totales, il n'existe pas de fonction sur $\mathbb{N}$ qui a pour image l'ensemble vide :

   $$\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \mathsf{image}(f) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$$

   Nous avons donc trouvé un élément de $2^{\mathbb{N}}$ qui n'est l'image d'aucune fonction, c n'est donc pas surjective. En d'autres termes,

   $$\begin{aligned} & \exists B \in 2^{\mathbb{N}} \quad \forall f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c(f) \neq B \\ & \Leftrightarrow \neg \Big(\forall B \in 2^{\mathbb{N}} \quad \exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c(f) = B\Big) \\ & \Leftrightarrow \neg\,(c \quad \text{surjective}) \end{aligned}$$

   ■
2. c est « presque » une surjection, elle satisfait la condition pour tous les $B \neq \emptyset$:

   $$\forall\ B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \quad \exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c(f) = B$$

   Preuve. Nous procédons par construction. Pour chaque $B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$, nous allons construire une fonction f_B telle que $\mathsf{image}(f_B) = B$.
   Pour ce faire, nous aurons besoin pour chaque sous-ensemble B de $\mathbb{N}$ d'un élément distingué $n_B \in B$; par exemple, nous dénotons par n_B l'élément le plus petit dans B (selon l'ordre standard sur $\mathbb{N}$).
   Avec ceci, nous définissons f_B pour chaque $B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ comme suit :

   $$\begin{aligned} f_B: \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \in B \\ n_B & \text{si } n \notin B \end{cases} \end{aligned}$$

   En fait, par construction, la fonction f_B est l'identité sur le sous-ensemble B et elle associe un élément distingué n_B aux nombres naturels restants. ■

Notons qu'il n'est pas possible de définir f_B pour $B = \emptyset$. En effet, le premier cas de définition ($x \in B$) n'est jamais utilisé car l'ensemble vide n'a pas d'éléments ($\forall x\; x \notin \emptyset$). Nous tomberons donc toujours dans le second cas de définition ($x \notin B$) lors de l'application de $f_\emptyset$ à un élément x. Néanmoins, dans le second cas nous ne somme pas capables d'associer un élément distingué puisqu'il n'existe pas d'élément qui appartient à l'ensemble vide ($\forall x\; x \notin \emptyset$). $f_\emptyset$ n'est donc pas définie.

3. Nous posions ensuite la question de savoir si cela était un problème. C'est bien évidemment un problème car cela ne nous permet pas de démontrer un des pas (le numéro (3)) de notre démonstration qu'il existe des fonctions qui ne sont pas calculables.

4. Afin de se tirer de ce mauvais pas, nous « corrigeons » la fonction c. Nous allons essayer de trouver une fonction c' complètement surjective, traitant aussi le cas de l'ensemble vide.

   Le problème est que si c' associe $\emptyset$ avec une fonction particulière, appelons-la $f_\emptyset$, il faut faire attention — afin de ne pas perdre la propriété de « quasi » surjectivité démontrée au point 2 — à ce qu'il existe au moins une autre fonction sur les nombres naturels qui a la même image que $f_\emptyset$.

   Il existe une infinité de choix possibles pour $f_\emptyset$. Nous présentons deux choix possibles.

   (a) Notons que, par la définition de f_B ci-dessus, la fonction $f_\mathbb{N}$ est l'identité $\mathrm{id}_\mathbb{N}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Elle satisfait donc $\mathsf{image}(f_\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

   Notons aussi qu'il existe au moins une autre fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui satisfait $\mathsf{image}(f) = \mathbb{N}$. Construisons une telle fonction et appelons la $f_\emptyset$. Prenons, par exemple, la fonction qui permute 0 et 1 et qui est l'identité pour les nombres plus grand que 1 :

   $$\begin{array}{rcll} f_\emptyset : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} & \\ 0 & \mapsto & 1 & \\ 1 & \mapsto & 0 & \\ n & \mapsto & n & \text{si } n > 1 \end{array}$$

   Par définition, $f_\emptyset$ satisfait $\mathsf{image}(f_\emptyset) = \mathbb{N}$.

   Maintenant, en posant

   $$\begin{array}{rl} c' : & (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to 2^\mathbb{N} \\ & f \mapsto \begin{cases} \mathsf{image}(f) & \text{si } f \neq f_\emptyset \\ \emptyset & \text{si } f = f_\emptyset \end{cases} \end{array}$$

   nous avons notre surjection $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to 2^\mathbb{N}$. En effet, c' est surjective car dans le cas $B \neq \emptyset$ nous avons déjà démontré la propriété au point 2 ci-dessus et pour le cas $B = \emptyset$ nous avons la fonction $f_\emptyset$ que nous venons de construire. En d'autres termes,

   $$\forall B \in 2^\mathbb{N} \quad \exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c'(f) = B$$

   (b) Nous pouvons aussi associer plusieurs fonctions avec l'ensemble vide. Dans ce cas, le problème de la potentielle perte de la « quasi » surjectivité du point 2 devient encore plus pertinent.

   Afin de faciliter l'écriture, nous introduisons ces deux notations :
   – Si $0 \notin A \subseteq \mathbb{N}$, alors $A{-}1 \stackrel{\text{def}}{=} \{a - 1 \mid a \in A\}$.
   – Si $A \subseteq \mathbb{N}$, alors $A{+}1 \stackrel{\text{def}}{=} \{a + 1 \mid a \in A\}$.

Définissons la fonction c'' comme suit.

$$c'': \quad (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to 2^{\mathbb{N}}$$
$$f \mapsto \begin{cases} \mathsf{image}(f) - 1 & \text{si } 0 \notin \mathsf{image}(f) \\ \emptyset & \text{si } 0 \in \mathsf{image}(f) \end{cases}$$

Pourquoi avons-nous choisi de soustraire 1 dans cette définition ? La fonction c'' doit être surjective, cependant, en associant $\emptyset$ avec toute fonction qui contient 0 dans son image, la fonction c'' risque de perdre ces images pour sa surjectivité. Par contre, si on adapte l'image de toutes les autres fonctions (qui elles ne contiennent pas 0 dans leur image) en soustrayant 1 à chacun de leurs éléments, nous sommes sûr de retrouver ces images pour la surjection.

Proposition 3.1 *c'' est surjective.*

$$\forall B \in 2^{\mathbb{N}} \quad \exists f \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \quad c''(f) = B$$

Preuve. Par construction.

cas $B = \emptyset$

Définissons la fonction constante f_0 telle que

$$f_0: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 0$$

Nous avons, par définition, $\mathsf{image}(f_0) = \{0\}$. Dès lors $c''(f_0) = \emptyset$.

cas $B \neq \emptyset$**.**

Nous construisons pour chaque $B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$ une fonction f'_B telle que $c''(f'_B) = B$.

Pour les fonctions f_B définies au point 2, nous avons $c''(f_B) = \mathsf{image}(f_B) - 1 = B - 1$ si $0 \notin B$. Nous ne retombons donc plus directement sur B. Ceci nous pousse à définir f'_B comme suit,

$$f'_B: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto f_B(n) + 1$$

afin prévoir dans cette construction déjà que la fonction c'' va soustraire 1 aux éléments de l'image. Notons que $\mathsf{image}(f'_B) = \mathsf{image}(f_B) + 1$ ce qui signifie que $0 \notin \mathsf{image}(f'_B)$. C'est donc toujours le premier cas de la définition de c'' qui s'applique lorsque nous appliquons une fonction f'_B à c''. Avec ceci, nous pouvons conclure, par définition de c'' et de f'_B, que

$$\forall B \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \quad c''(f'_B) = \mathsf{image}(f'_B) - 1 = (\mathsf{image}(f_B) + 1) - 1 = B$$

Des deux cas ci-dessus nous déduisons que c'' est surjective.

■