1. Stratégies de preuves

Par construction Montrer qu'il existe un ordre partiel qui n'est pas total.

Par l'absurde Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Aide : Travailler avec la notion de divisibilité (par 2).

Par analyse des cas Montrer que $n^2 + n$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par induction naturelle Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^3.$$

2. La structure d'une preuve

Dans le premier cours (p. 16), nous vous avons conseillé de ne pas apprendre une preuve entière par coeur, mais plutôt d'en apprendre sa structure. Une manière de faire cela est de regarder les stratégies utilisées dans la preuve.

Example : Une preuve de la non-surjectivité de la fonction c (Session 1, p. 26) peut être décrite comme suit :

1. On montre que c n'est pas surjective *par l'absurde* :
   en montrant que $\emptyset \notin \mathsf{image}(c)$.
2. On montre que $\emptyset \notin \mathsf{image}(c)$ *par contradiction* :
   en admettant l'éxistence d'un $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{image}(f) = \emptyset$, on en déduit une contradiction.
3. Étant donné $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{image}(f) = \emptyset$, on en déduit la contradiction *par construction* :
   $f(0) \in \mathsf{image}(f)$, $f(0) \notin \emptyset$, mais $\mathsf{image}(f) = \emptyset$ était supposé.

Décrire la structure de la preuve du théorème de Cantor $|A| < |2^A|$ pour A non vide de cette manière. Ne pas trop rentrer dans les détails – mais il faut en garder assez pour que *vous* puissiez reconstruire la preuve.

3. L'ordre alphabétique v.s. l'ordre lexicographique

Aurait-on pu utiliser l'ordre alphabétique de la même manière que l'ordre lexicographique pour définir la bijection *lpp* : $\mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ (Session 1, p. 24) ? Pourquoi ?