Automates et Calculabilité

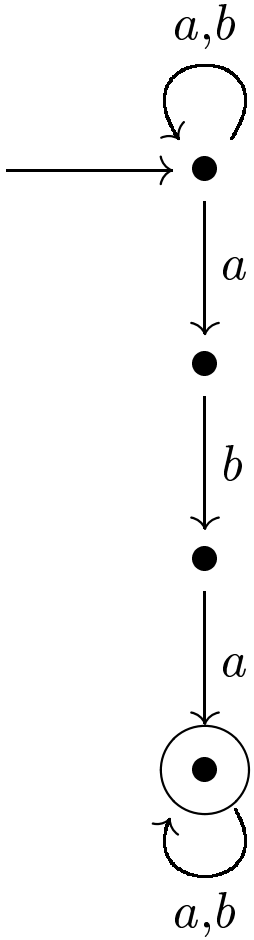
– Minimisation –

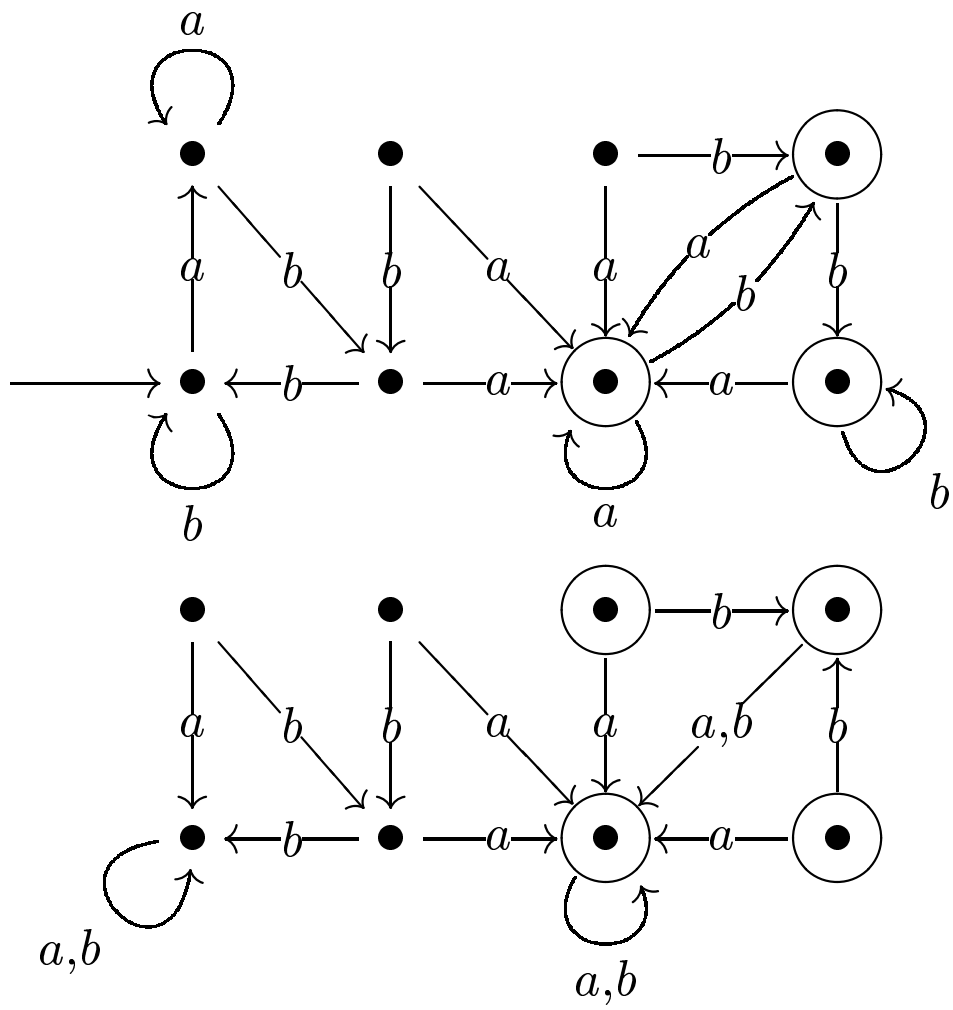
Leçon 8 : 8 dec 2003

Uwe Nestmann

EPFL-I&C

Quelques automates . . .





Motivation : Minimisation des AFDs

Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.

Nous cherchons l'automate ***minimal***
— par rapport au ***nombre d'états*** —
qui accepte le même langage que M.

Question : existe-t-il toujours un unique automate minimal ?

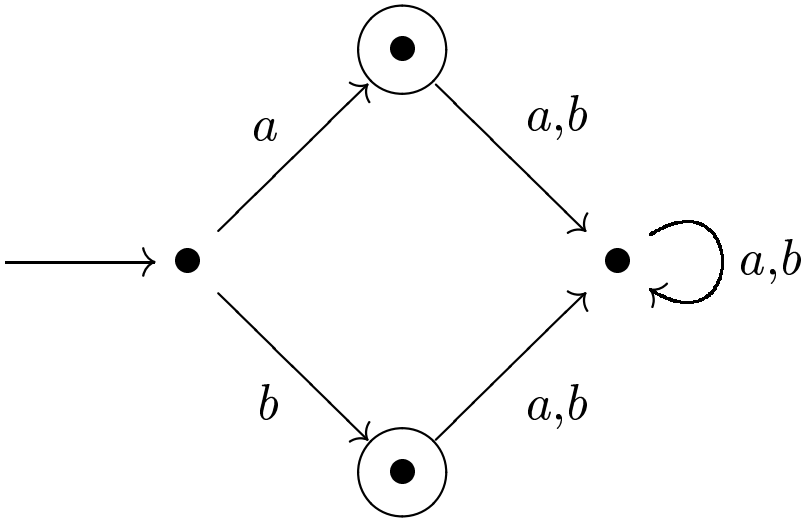
La minimisation se déroule en deux étapes :

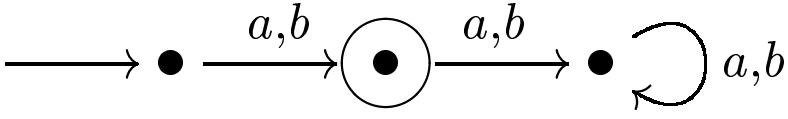
1. Suppression des ***états inaccessibles*** depuis l'état initial.

   L'état $q \in \mathcal{Q}$ est inaccessible (à partir de s)
   s'il n'existe pas de mot $x \in \Sigma$ tel que $\widehat{\delta}(s, x) = q$.

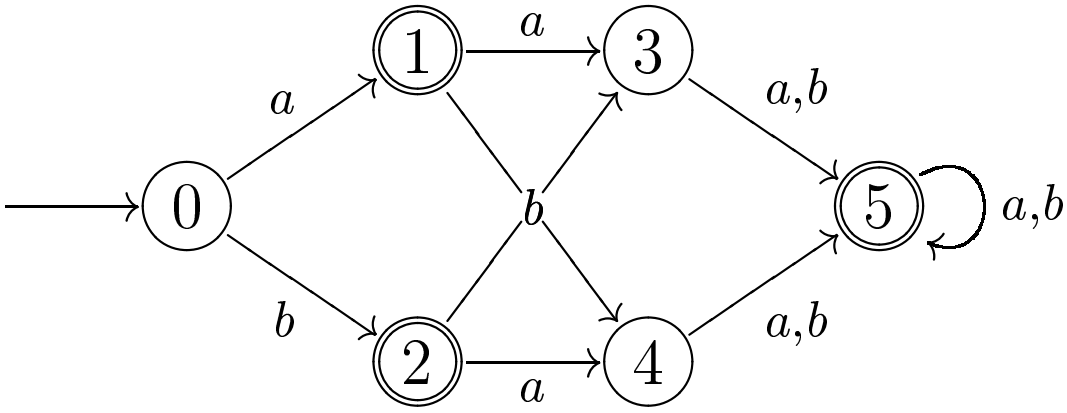
2. Fusion des ***états équivalents*** . . .

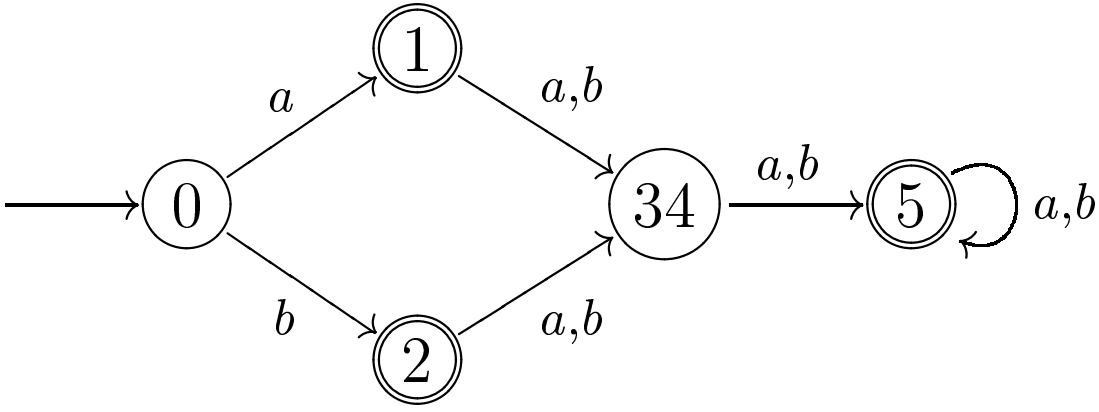
Exemple I

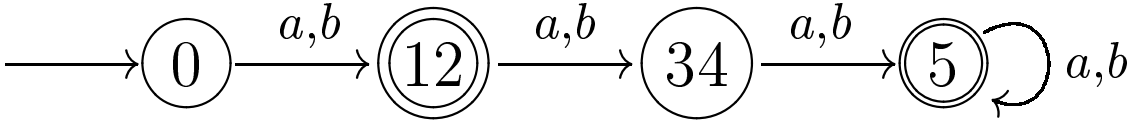




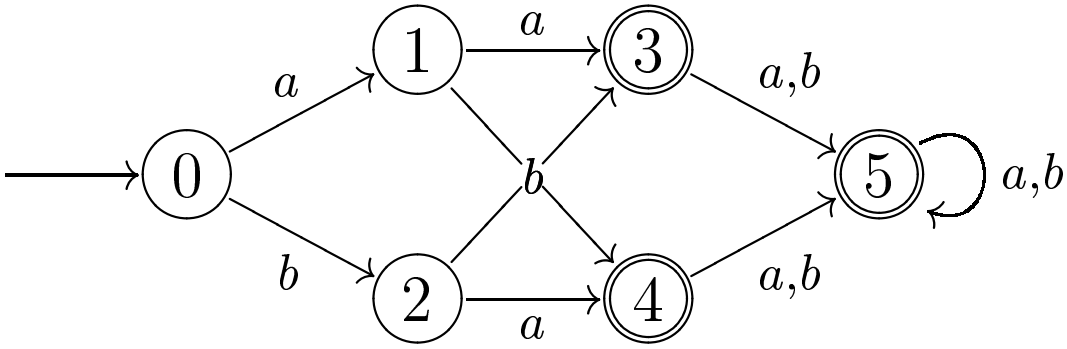
Exemple II

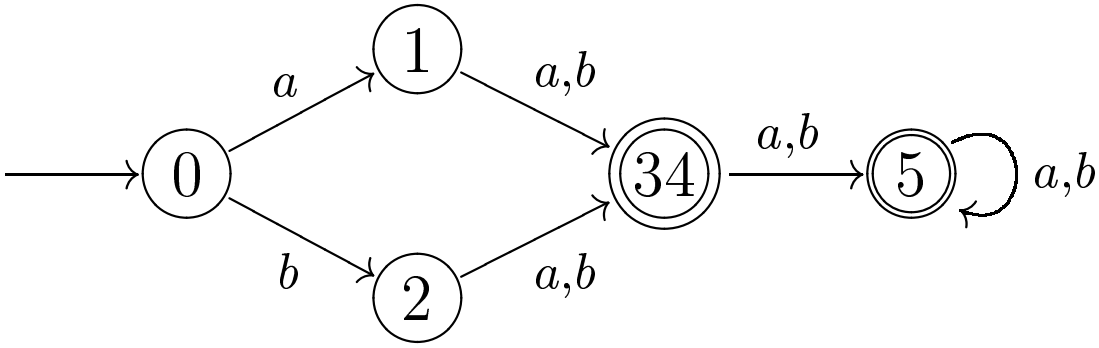


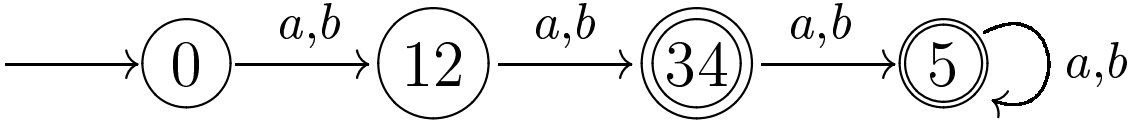


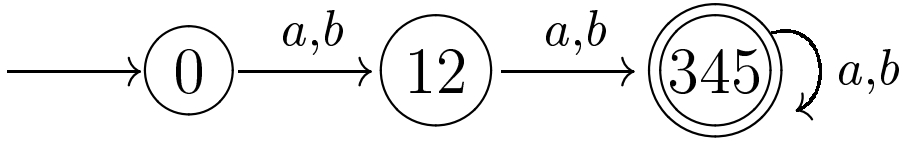


Exemple III

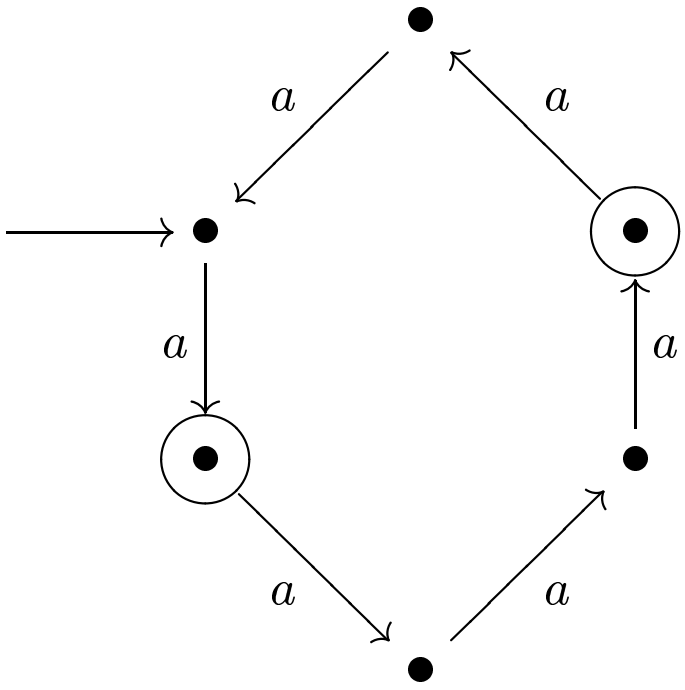

0
1
2
3
4
5
a
b
a
b
a
a,b
a,b
a,b

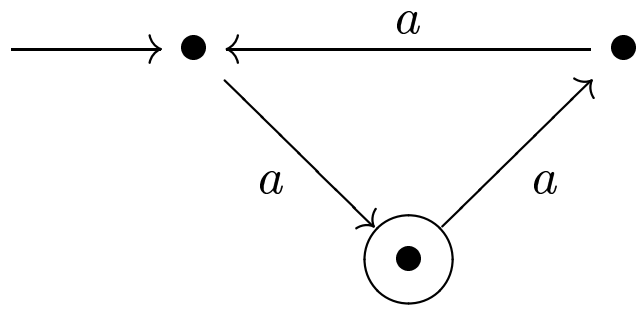

0
1
2
34
5
a
b
a,b
a,b
a,b
a,b


0
12
34
5
a,b
a,b
a,b
a,b


0
12
345
a,b
a,b
a,b

Exemple IV





Observations semi-formelles

Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.

Nous notons p "$\approx$" q si nous pensons de manière informelle pouvoir fusionner deux états p et q, et p "$\not\approx$" q si nous pensons que cela n'est pas possible.

Soit $p = \widehat{\delta}(s, x)$ et $q = \widehat{\delta}(s, y)$,

- Si $p \in F$ et $q \notin F$, alors p "$\not\approx$" q.
- Si p "$\approx$" q, alors $\widehat{\delta}(s, xa)$ "$\approx$" $\widehat{\delta}(s, ya)$.

S'il existe z tel que $\widehat{\delta}(p, z) \in F$ et $\widehat{\delta}(q, z) \notin F$, alors p "$\not\approx$" q.

Idée : p "$\approx$" q ssi $(\forall x \in \Sigma^*)\big(\, \widehat{\delta}(p, x) \in F \iff \widehat{\delta}(q, x) \in F \,\big)$
. . . défini une équivalence sur l'ensemble des états.

Construction du quotient (I)

Définition:
Toute équivalence $\equiv$ sur un ensemble X détermine un ***quotient*** $X/\equiv$ défini par ses ***classes d'équivalence*** :

$$[p]_\equiv \stackrel{\text{def}}{=} \{\, q \in X \mid q \equiv p \,\} \qquad X/\equiv \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [p]_\equiv \mid p \in X \,\}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on écrit $[p]$ à la place de $[p]_\equiv$.

Exemple: Ecrire le quotient $\mathbb{N}_{\equiv_3}$ qui est déterminé par la relation $\equiv_3$ (égalité modulo 3) sur $\mathbb{N}$.

Lemme:
Soit $\equiv$ une équivalence sur un ensemble X.

- $p \equiv q$ ssi $[p] = [q]$.
- Si $[p] \neq [q]$, alors $p \notin [q]$ et $q \notin [p]$.
- $X = \bigcup_{p \in X} [p]$.

Construction du quotient (II)

Définition:
Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.
La relation binaire $\approx$ sur $\mathcal{Q}$ est une équivalence définie par :

$$p \approx q \text{ ssi } (\forall x \in \Sigma^*)\big(\, \widehat{\delta}(p,x) \in F \iff \widehat{\delta}(q,x) \in F \,\big)$$

L'automate $M/\!\approx$ est défini par $(\mathcal{Q}/\!\approx, \Sigma, \delta_\approx, [s], F_\approx)$.

- $\mathcal{Q}/\!\approx \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [p] \mid p \in \mathcal{Q} \,\}$
- $\delta_\approx([p], a) \stackrel{\text{def}}{=} [\delta(q,a)]$.
- $F_\approx \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [q] \mid q \in F \,\}$

Lemme: La fonction $\delta_\approx$ est bien définie :

- Si $p \approx q$, alors $\delta(p,a) \approx \delta(q,a)$.
- Si $[p] = [q]$, alors $[\delta(p,a)] = [\delta(q,a)]$.

Propriétés du quotient (I)

Lemme:
Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.
Soit $M/\approx = (\mathcal{Q}/\approx, \Sigma, \delta_\approx, [s], F_\approx)$.

1. Pour tout $p \in \mathcal{Q}$: $p \in F \iff [p] \in F_\approx$.
2. Pour tout $p \in \mathcal{Q}$, et pour tout $x \in \Sigma^*$: $\widehat{\delta_\approx}([p], x) = [\widehat{\delta}(p, x)]$.

Preuves : (Idées)

1. $\Rightarrow$ Immédiate par définition de $F_\approx$.
   $\Leftarrow$ Observer que $p \notin F$ et $p \approx q$ implique que $q \notin F$.
   Alors, si $p \notin F$ il n'existe pas de q tel que $p \approx q$ et $[q] \in F_\approx$.
2. Par induction sur x :
   - $\widehat{\delta_\approx}([p], \epsilon) = [\widehat{\delta}(p, \epsilon)]$.
   - $\widehat{\delta_\approx}([p], xa) = [\widehat{\delta}(p, xa)]$.

Propriétés du quotient (II)

Théorème:
Soit $M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.
Soit $M/\approx = (Q/\approx, \Sigma, \delta_\approx, [s], F_\approx)$.
Alors,

$$L(M/\approx) = L(M).$$

Preuve :
Pour tout $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{array}{lcll} x \in L(M/\approx) & \iff & \widehat{\delta_\approx}([s], x) \in F_\approx & \text{acceptation de } x \text{ par } M/\approx \\ & \iff & [\widehat{\delta}(s, x)] \in F_\approx & \text{Lemme p.11 (2)} \\ & \iff & \widehat{\delta}(s, x) \in F & \text{Lemme p.11 (1)} \\ & \iff & x \in L(M) & \text{acceptation de } x \text{ par } M \end{array}$$

Propriétés du quotient (III)

Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.
Soit $M/\approx = (\mathcal{Q}/\approx, \Sigma, \delta_\approx, [s], F_\approx)$, qui est aussi un AFD.
Nous définissons « le quotient du quotient » par :

$$[p] \sim [q] \text{ ssi } \forall x \in \Sigma^* : \left(\widehat{\delta_\approx}([p], x) \in F_\approx \iff \widehat{\delta_\approx}([q], x) \in F_\approx \right)$$

$\sim$ est une relation définie sur l'ensemble des $\approx$-classes de $\mathcal{Q}$.

$$\begin{array}{lll}
[p] \sim [q] & & \\
\Rightarrow \quad \forall x : \left(\widehat{\delta_\approx}([p], x) \in F_\approx \iff \widehat{\delta_\approx}([q], x) \in F_\approx \right) & & \text{déf. de } \sim \\
\Rightarrow \quad \forall x : \left([\widehat{\delta}(p, x)] \in F_\approx \iff [\widehat{\delta}(q, x)] \in F_\approx \right) & & \text{Lemme p.11 (2)} \\
\Rightarrow \quad \forall x : \left(\widehat{\delta}(p, x) \in F \iff \widehat{\delta}(q, x) \in F \right) & & \text{Lemme p.11 (1)} \\
\Rightarrow \quad p \approx q \quad \Rightarrow \quad [p] = [q] & &
\end{array}$$

Il suffit donc d'exécuter la minimisation une seule fois.

Algorithme de minimisation (I)

Nous calculons la relation $\approx$ pour un AFD $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ dont tous les états sont atteignables par la procédure suivante:

1. Construire un tableau contenant une entrée pour tous les couples non-ordonnés $\{p, q\}$ avec $p, q \in \mathcal{Q}$.
2. Marquer tous les couples $\{p, q\}$ tels que $p \in F$ et $q \notin F$.

$$\text{(INIT)}\ \frac{p \in F \qquad q \notin F}{\{p, q\} \in \surd}$$

3. Répéter (appliquer) autant que possible :

$$\text{(STEP)}\ \frac{a \in \Sigma \qquad \delta(p, a) = p' \qquad \delta(q, a) = q' \qquad \{p', q'\} \in \surd}{\{p, q\} \in \surd}$$

4. Nous définissons : $p \approx_{\mathrm{m}} q$ si $\{p, q\} \notin \surd$.

Algorithme de minimisation (II)

- Il se peut que l'on soit obligé de vérifier l'application de la règle (STEP) plusieurs fois pour le même couple.
  Un prémisse manquant à un moment peut apparaître plus tard dans la procédure ...

- La procédure termine parce que ...
  -
  -

- Il nous reste à démontrer que
  les relations $\approx$ et $\approx_{\mathrm{m}}$ coincident. $\Rightarrow$ Exercice de la série 8 !

- Faisons quelques exemples ...

La minimisation par automate

La technique appliquée dans la procédure de minimisation est souvent utilisée dans le domaine de la vérification des programmes sous le nom de ***backwards reachability analysis*** (BRA).

Soit $M = (\mathcal{Q}, \Sigma, \delta, s, F)$ un AFD.

Définissons un AFN $M_{\mathrm{BRA}} = (\mathcal{Q}_{\mathrm{BRA}}, \Sigma, \Delta_{\mathrm{BRA}}, S_{\mathrm{BRA}}, F_{\mathrm{BRA}})$ par :

- $\mathcal{Q}_{\mathrm{BRA}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, \{p, q\} \mid p, q \in \mathcal{Q} \wedge p \neq q \,\}$
- $\Delta_{\mathrm{BRA}}(\{p', q'\}, a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, \{p, q\} \mid p' = \delta(p, a) \wedge q' = \delta(q, a) \,\}$
- $S_{\mathrm{BRA}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, \{p, q\} \mid p \in F \wedge q \notin F \,\}$
- $F_{\mathrm{BRA}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, \{p, q\} \in \mathcal{Q}_{\mathrm{BRA}} \mid \exists x \in \Sigma^* : \{p, q\} \in \widehat{\Delta_{\mathrm{BRA}}}(S_{\mathrm{BRA}}, x) \,\}$

Alors, $\{p, q\} \in \surd$ ssi $\{p, q\} \in F_{\mathrm{BRA}}$.