Automates et Calculabilité

– Fonctions récursives –

Leçon 13 : 26 jan 2004

Uwe Nestmann

EPFL-I&C

But

Les MdT ne sont pas le seul formalisme qui définit toutes les fonctions calculables. Il en existe plusieurs autres. (Rappelez-vous que la Thèse de Church-Turing ne porte pas seulement le nom de Turing.)

Les ***fonctions récursives*** sont une approche purement syntaxique. L'idée est de définir toutes les fonctions totales et calculables en les générant selon un schéma assez restreint basé sur:

- ☐ un petit ensemble de ***fonctions simples*** qui sont trivialement calculable, au sens intuitif, et
- ☐ des mécanismes précis de ***construction*** pour générer des fonctions plus complexes à partir de celles déjà définies.

Exemples

$$x^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois}} \qquad\qquad n! \overset{\text{def}}{=} n*(n-1)*\cdots*1$$

$$\begin{array}{lcl} x^0 & \overset{\text{def}}{=} & 1 \\ x^n & \overset{\text{def}}{=} & x * x^{n-1} \quad \text{si } n>0 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 0! & \overset{\text{def}}{=} & 1 \\ n! & \overset{\text{def}}{=} & n*(n-1)! \quad \text{si } n>0 \end{array}$$

Idée généralisée :
$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & m \\ f(n+1) & = & g(f(n)) \end{array}$$

Calcul de la valeur de $f(n+1)$ en fonction de la valeur de $f(n)$. Le cas « de base » garanti que la fonction « s'arrête » ...

Peut-on définir toute fonction calculable de cette manière ?

Ensemble des fonctions totales sur $\mathbb{N}$ (I)

(* Kleene et Gödel, aussi en 1936 ... *)

Basé sur les nombres naturels $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions :

0. ***Constantes***

$$\mathbf{k}_n : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N} \qquad \mathbf{k}_n() \overset{\text{def}}{=} n$$

1. ***Zéro***

$$\mathbf{z} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \mathbf{z}(x) \overset{\text{def}}{=} 0$$

2. ***Successeur***

$$\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad \mathbf{s}(x) \overset{\text{def}}{=} x{+}1$$

3. ***Projections***

$$\pi^m_k : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N} \qquad \pi^m_k(x_1,\ldots,x_m) \overset{\text{def}}{=} x_k$$

Composition de fonctions

Soit $f : B \to C$ et $g : A \to B$ des fonctions.

Parfois, on écrit $g \in (A \to B)$ à la place de $g : A \to B$ pour dire que g est un élément de l'espace/l'ensemble des fonctions de domaine A et codomaine B.

Se rappeler que $(f \circ g)(x)$ signifie $f(g(x))$.

Comment définir la composition de fonctions qui ont plus d'un seul argument?

$$\begin{array}{rcl} \Big(f \circ g'\Big)(x_1,\ldots,x_m) & \overset{\text{def}}{=} & f\Big(g'(x_1,\ldots,x_m)\Big) \\ \Big(f' \circ (g_1,\ldots,g_k)\Big)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f'\Big(g_1(x),\ldots,g_k(x)\Big) \end{array}$$

Associer les types de ces fonctions ...

Ensemble des fonctions totales sur $\mathbb{N}$ (II)

4. ***Composition***

$$\textbf{Comp}_{k,m} : (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N}^m \to \mathbb{N})^k \to (\mathbb{N}^m \to \mathbb{N})$$

Soit $f \in (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$ et pour tout $1{\le}i{\le}k : g_i \in (\mathbb{N}^m \to \mathbb{N})$.

$$\textbf{Comp}_{k,m}\Big(f, (g_1,\ldots g_k)\Big) \overset{\text{def}}{=} f \circ (g_1,\ldots g_k)$$

Comp est juste la version préfixée de l'opération (infixe) $\circ$.

$$\begin{array}{l} \textbf{Comp}\Big(f, (g_1,\ldots g_k)\Big)(x_1,\ldots,x_m) \\ \overset{\text{def}}{=} \Big(f \circ (g_1,\ldots g_k)\Big)(x_1,\ldots,x_m) \\ \overset{\text{def}}{=} f\Big(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_m)\Big) \end{array}$$

Récursion primitive

5. Schema généralisé :
   Soit $\overline{x} = x_1,\ldots,x_k$.
   Soit $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$, et $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} h(\overline{x},0) & \overset{\text{def}}{=} & f(\overline{x}) \\ h(\overline{x},n{+}1) & \overset{\text{def}}{=} & g(\overline{x},n,h(\overline{x},n)) \end{array}$$

   $\textbf{PrRec}_k : (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N})$
   Selon le schema, $h = \textbf{PrRec}_k(f,g)$

Une fonction est dite ***primitive récursive*** si elle peut être générée à partir des fonctions simples 1.-3., de la composition 4., et du schéma de la récursion primitive 5.

Exemples de la récursion primitive

☐ ***Addition:*** $\mathrm{add} = \textbf{PrRec}_1(f,g)$

$$\begin{array}{rcll} f(y) & \overset{\text{def}}{=} & y & (f \overset{\text{def}}{=} \pi^1_1) \\ g(y,n,x) & \overset{\text{def}}{=} & \mathbf{s}(x) & (g \overset{\text{def}}{=} \textbf{Comp}(\mathbf{s},\pi^3_3)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{add}(y,0) & \overset{\text{def}}{=} & f(y) \\ \mathbf{add}(y,n{+}1) & \overset{\text{def}}{=} & g(y,n,\mathbf{add}(y,n)) \end{array}$$

☐ ***Multiplication:*** $\mathrm{mult} = \textbf{PrRec}_1(f,g)$

$$\begin{array}{rcll} f(y) & \overset{\text{def}}{=} & \mathbf{z}(y) & (f \overset{\text{def}}{=} \mathbf{z}) \\ g(y,n,x) & \overset{\text{def}}{=} & \mathbf{add}(y,x) & (g \overset{\text{def}}{=} \textbf{Comp}(\mathbf{add},(\pi^3_1,\pi^3_3))) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{mult}(y,0) & \overset{\text{def}}{=} & f(y) \\ \mathbf{mult}(y,n{+}1) & \overset{\text{def}}{=} & g(y,n,\mathbf{mult}(y,n)) \end{array}$$

Exercises

Montrer que les fonctions suivantes sont primitives-récursives.
C'est-à-dire, formaliser les définitions par les constructions 0.-5.

- ☐ $\mathbf{pred} : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- ☐ $\mathbf{sub} : (y,x) \mapsto \begin{cases} y-x & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{si } y < x \end{cases}$

- ☐ $\mathbf{sq} : x \mapsto x^2$

Exemple

Calcul de la racine sur les nombres naturels :

$$\sqrt{x} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ - & \text{si } x = 2 \\ - & \text{si } x = 3 \\ 2 & \text{si } x = 4 \\ - & \text{si } x = 5 \\ \dots \end{cases}$$

Observation : toute fonction primitive-récursive est totale.
Donc, $\sqrt{\cdot}$ ne peut pas être primitive-récursive.

Récursion partielle

6. Minimisation limitée : « trouver le plus petit tel que ... »
   Soit $\overline{x} = x_1, \dots, x_k$.
   Soit $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, et $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$.

$$\mu : (\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N}^k \to \mathbb{N})$$

$$f(\overline{x}) \overset{\text{def}}{=} \mu y.(g(y,\overline{x}) = 0)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y & \text{si } g(y,\overline{x}) = 0 \\ & \text{et } \forall z \leq y\text{: } g(z,\overline{x}) \text{ est défini, mais } g(z,\overline{x}) \neq 0 \\ - & \text{si un tel } y \text{ n'existe pas} \end{cases}$$

Une fonction est dite ***partiellement récursive*** (ou ***μ-récursive***)
si elle peut être générée à partir des fonctions simples 0.-3.,
de la composition 4., du schéma de la récursion primitive 5.,
et de la minimisation 6.

Exercise

Représenter la fonction $\sqrt{\cdot}$ comme fonction μ-récursive.

<u>Idée:</u>
"La racine de x est le plus petit nombre y tel que $y^2 - x = 0$."

Théorème

(De manière informelle :)

1. Pour toute fonction partiellement récursive
   il existe une MdT qui la calcule.

2. Toute fonction calculée par une MdT
   est partiellement récursive.

Sont toutes les fonctions totales primitives-récursives?
(Comme le voulaient Kleene et Gödel ...)