Automates et Calculabilité

– Réduction & Théorèmes de Rice –

Leçon 12 : 19 jan 2004

Uwe Nestmann

EPFL-I&C

5 problèmes de décidabilité

Est-il décidable si une MdT donnée :

1. possède au moins 2004 états ?
2. prend plus de 42 étapes pour le mot d'entrée ϵ ?
3. prend plus de 42 étapes pour ***au moins un*** mot d'entrée ?
4. prend plus de 42 étapes pour ***tous*** les mots d'entrée ?
5. ne s'éloigne jamais avec sa tête de plus de 10^6 cases du marqueur « gauche » du ruban ?

Indécidabilité : deux techniques

Nous avons utilisé la technique de la *diagonalisation*, pour démontrer « directement » l'indécidabilité d'un problème particulier.

Nous avons brièvement et informellement vu la technique de la *réduction*, pour démontrer « indirectement » l'indécidabilité de plusieurs autres problèmes . . .
. . . ce qui est souvent plus simple et moins lourd qu'une démonstration directe par diagonalisation.

Intuitivement, *on essaye de décider le problème de l'arrêt en supposant que le problème considéré est décidable*.
En cas de « succès », on sait (= peut déduire) que le problème considéré est aussi indécidable (le problème de l'arrêt l'étant).

Dans la suite *nous allons formaliser la notion de* ***réduction*** pour établir une vraie technique de preuve.

6 problèmes de décidabilité

Est-il décidable si une MdT donnée :

1. accepte le mot ϵ ?
2. accepte $\emptyset$ (un mot du tout) ?
3. accepte Σ^* (tous les mots sur l'alphabet donné) ?
4. accepte un langage fini ?
5. accepte un langage régulier ?
6. accepte un langage récursif ?

Négatif pour le problème 4-4 (I)

Essayons de décider si une MdT M s'arrête pour x
en supposant que la réponse au problème 4-4 est « oui », c-à-d,
qu'il est possible de décider la finitude du langage d'une MdT.

Construisons une MdT $\boxed{M'_{M,x}}$ (dép. de la MdT M et l'entrée x).

Pour une entrée y arbitraire, la MdT $M'_{M,x}$:

- ☐ efface y du ruban;
- ☐ écrit x (qui est constant dans $M'_{M,x}$) sur le ruban ;
- ☐ simule l'exécution de M sur x ;
- ☐ accepte (l'entrée y) si M s'arrête pour x.

Par construction, $M'_{M,x}$ (pour M et x donnés) accepte
soit Σ^*, soit $\emptyset$, en fonction de l'arrêt de M pour l'entrée x.

Négatif pour le problème 4-4 (II)

Par construction de $M'_{M,x}$, pour M et x donnés :

$$L(M'_{M,x}) = \begin{cases} \Sigma^* & \text{si } M \text{ s'arrête pour } x \\ \emptyset & \text{si } M \text{ ne s'arrête pas pour } x \end{cases}$$

S'il est possible de décider la finitude du langage d'une MdT,
alors on peut décider, en particulier,
si $L(M'_{M,x}) = \Sigma^*$ (infini) ou $L(M'_{M,x}) = \emptyset$ (fini).
Donc, on peut décider si M s'arrête pour x ou non . . .

Nous obtenons des réponses négatives aux questions 4-1, 4-2,
et 4-3, en utilisant exactement la même construction $M'_{M,x}$ en
remplaçant « la finitude » par « l'acceptation d'ϵ » (4-1), «
l'acceptation d'$\emptyset$ » (4-2), ou « l'acceptation d'Σ^* » (4-3).
Comparer avec Série 11, Ex. 2 . . .

Négatif pour le problème 4-5 (I)

Choisissons un ensemble r.e., mais non-régulier, par exemple
MP. Soit M_{MP} une MdT qui accepte MP.

Essayons de décider si une MdT M s'arrête pour x,
en supposant que la réponse à 4-5 est « oui »,
c-à-d, que l'on peut décider si le langage d'une MdT est régulier.

Construirons une MdT $\boxed{M''_{M,x}}$ (dép. de la MdT M et l'entrée x).

Pour une entrée y arbitraire, la MdT $M''_{M,x}$:

- ☐ sauvegarde y sur le ruban (pour plus tard . . .) ;
- ☐ écrit x (qui est constant dans $M''_{M,x}$) sur le ruban ;
- ☐ simule l'exécution de M sur x ;
- ☐ <u>si M s'arrête pour x</u>, continue avec la simulation de
  l'exécution de M_{MP} sur l'entrée y ;
- ☐ accepte (l'entrée y) si M_{MP} accepte y.

Négatif pour le problème 4-5 (II)

Par construction de $M''_{M,x}$, pour M et x donnés :

$$L(M''_{M,x}) = \begin{cases} \text{MP} & \text{si } M \text{ s'arrête pour } x \\ \emptyset & \text{si } M \text{ ne s'arrête pas pour } x \end{cases}$$

Notons que MP a été choisi non-régulier.
Observons que, par contre, $\emptyset$ est régulier.

S'il est possible de décider la régularité du langage d'une Mdt,
alors on peut décider, en particulier,
si $M''_{M,x}$ = MP (non-régulier) ou si $M''_{M,x} = \emptyset$ (régulier).
Donc, on peut décider si M s'arrête pour x ou non . . .

En remplaçant « régularité » par « récursivité »,
nous obtenons une réponse négative à la question 4-6
en utilisant exactement la même construction.

Réduction, version formelle (I)

Définition:
Soit $A \subseteq \Sigma^*$ et $B \subseteq \Delta^*$ des langages sur les alphabets Σ et Δ.
Une ***réduction de*** A ***à*** B est une ***fonction totale calculable***

$$\sigma : \Sigma^* \to \Delta^* \qquad \text{telle que} \qquad x \in A \iff \sigma(x) \in B.$$

Nous écrivons $A \leq_{\mathrm{red}} B$ s'il existe une telle réduction de A à B.

Remarques:

- ☐ Il est important que la condition exprime un « ssi ».
- ☐ Il n'est pas nécessaire que σ soit injective ou surjective.
- ☐ Il est important que σ soit *totale* et *effectivement calculable* ! Autrement dit : il doit exister une MdT qui, pour chaque mot d'entrée x s'arrête avec le mot $\sigma(x)$ sur le ruban.
- ☐ La relation $\leq_{\mathrm{red}}$ est transitive.

Exemple 4-5, revisité

Nous avons utilisé une réduction $A \leq_{\mathrm{red}} B$ pour

$$\begin{aligned} A &= \{\, [M]\#[x] \mid M \text{ s'arrête pour } x \,\} = \text{HP} \\ B &= \{\, M \mid L(M) \text{ est non-régulier } \} \end{aligned}$$

par

$$\sigma : [M]\#[x] \;\mapsto\; M''_{M,x}$$

qui satisfaisait

$$[M]\#[x] \in A \iff M''_{M,x} \in B.$$

Réduction, version formelle (II)

Théorème:

1. Si $A \leq_{\mathrm{red}} B$ et B est r.e., alors A est aussi r.e.
2. Si $A \leq_{\mathrm{red}} B$ et B est récursif, alors A est aussi récursif.

Preuve:

1. Soit σ la fonction calculable qui justifie $A \leq_{\mathrm{red}} B$.
   Si B est r.e., il existe M_B telle que $L(M_B) = B$.
   Construire M_A (pour accepter A) pour l'entrée x par :
   ☐ calculer $\sigma(x)$, (* de manière effective! *)
   ☐ exécuter M_B sur $\sigma(x)$,
   ☐ poser que M_A accepte x si M_B accepte $\sigma(x)$.
   Par cela : M_A acc. $x \iff \sigma(x) \in B \iff x \in A$. CQFD
2. Utiliser transparents 19 et 20 de la leçon 10 . . .

Exemple : FIN $= \{\, M \mid L(M)$ est fini $\}$

FIN est non-r.e.; $\overline{\text{FIN}}$ est non-r.e.

$$\overline{\text{HP}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, [M]\#[x] \mid M \text{ ne s'arrête pas pour } x \,\}$$

Proposition:

1. $\overline{\text{HP}} \leq_{\mathrm{red}}$ FIN.
2. $\overline{\text{HP}} \leq_{\mathrm{red}} \overline{\text{FIN}}$.

Preuve:

1. Utiliser la construction de la réponse à la question 4-4.
2. Démontrer l'équivalence : HP $\leq_{\mathrm{red}}$ FIN.
   Construire $M''_{M,x}$ telle que
   M s'arrête pour x ssi $L(M''_{M,x})$ est fini.

RE

Définition: Soit Σ un alphabet.

$$\mathrm{RE}_\Sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ A \subseteq \Sigma^* \mid A \text{ est r.e.} \}$$

NB: Si $A \in \mathrm{RE}_\Sigma$, il existe une MdT M_A avec $L(M_A) = A$.

Définition: Une ***propriété*** P de RE_Σ est une fonction totale

$$P : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{ \top, \bot \}$$

où $\top$ signifie « vrai », et $\bot$ signifie « faux ».

Exemple: Propriété « vide »

$$P(A) = \begin{cases} \top & \text{si } A = \emptyset \\ \bot & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Théorème de Rice (I)

Définition: P est ***trivial*** si $\forall A : P(A) = \top$ ou $\forall A : P(A) = \bot$.
Il n'existe que deux propriétés de RE_Σ qui sont triviales.

Théorème:
Toute propriété *non-triviale* de RE_Σ est *non-décidable*.

NB: Si $P : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{ \top, \bot \}$ est non-triviale, il n'existe pas de MdT totale qui accepte les (codages des) A telle que $P(A) = \top$.

Idée de la preuve:

- ☐ Soit P avec (s.p.d.g.) $P(\emptyset) = \bot$ et $P(A) = \top$.
- ☐ Démontrer que HP $\leq_{\mathrm{red}} \{ M \mid P(L(M)) = \top \}$.
- ☐ Par la même construction que dans la réponse à 4-5, mais utilisant MdT K avec $L(K) = A$ à la place de M_{MP}.

Une propriété des propriétés

Définition: Une propriété P de RE_Σ est ***monotone***
si pour tout $A, B \in \mathrm{RE}_\Sigma$: $A \subseteq B$ implique $P(A) \leq P(B)$
(par rapport à l'ordre $\bot \leq \bot, \bot \leq \top, \top \leq \top$).

Exemple:
Lesquelles des propriétés suivantes sont monotones ?

- ☐ "$L(M)$ est infini"
- ☐ "$L(M)$ est fini"
- ☐ "$L(M) = \Sigma^*$"
- ☐ "$L(M) = \emptyset$"

Théorème de Rice (II)

Théorème:
Toute propriété *non-monotone* de RE_Σ est *non-semi-décidable*.

En d'autres mots :
Si $P : \mathrm{RE}_\Sigma \to \{ \top, \bot \}$ est non-monotone,
alors $T_P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{ M \mid P(L(M)) = \top \}$ et non-r.e.

Idée de la preuve:

- ☐ Si P est non-monotone, il existe M_0 et M_1 telles que $L(M_0) \subseteq L(M_1)$, $P(L(M_0)) = \top$, et $P(L(M_1)) = \bot$.
- ☐ Établir une réduction $\overline{\mathrm{HP}} \leq_{\mathrm{red}} T_P$ par σ : HP $\to \overline{T_P}$ qui associe $[M]\#[x]$ avec une machine $M'_{M,x}$ qui accepte y si
  - soit M_0 accepte y,
  - soit M_1 accepte y et M s'arrête pour x.
- ☐ ...