Réductions Montrer que la réduction faite dans la dernière série vérifie bien la définition formelle du concept de réduction.

Rappels :

1. la réduction était faite dans le cadre de l'exercice suivant :

> Soient
> (a) $\mathcal{M}$ l'ensemble des machines de Turing,
> (b) $M \stackrel{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \_, \delta, s, t, r \rangle \in \mathcal{M}$, et
> (c) $\mathcal{L}(M)$ le langage accepté par M.
>
> Le problème de décision :
>
> *M, accepte-elle le mot vide ϵ ?*
>
> est-il décidable ? En d'autres mots, la fonction (totale) $f : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ définie telle que
>
> $$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon \in \mathcal{L}(M) \text{ et} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
>
> est-elle calculable ?
>
> ---
>
> Prenons une instance du problème de l'arrêt et réduisons-le au problème de décision en considération : soit $m \in \Sigma^*$ et construisons $M' \in \mathcal{M}$ tel que M'
> (a) efface tout mot $m' \in \Sigma^*$ presenté en entrée sur son ruban
> (b) écrit m sur son ruban
> (c) applique M à cette nouvelle entrée
> (d) accepte si et seulement si M s'arrête avec m
>
> où m et M sont codés dans δ. En conséquence,
>
> $$\mathcal{L}(M') = \begin{cases} \Sigma^* & \text{si } M \text{ s'arrête avec } m \text{ et} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$
>
> et
>
> $$f(M') = \begin{cases} 1 & \text{si } M \text{ s'arrête avec } m \text{ et} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
>
> En conclusion, f n'est pas calculable et donc notre problème de décision *indécidable* étant donné que le problème de l'arrêt est indécidable lui-même aussi.

2. la définition formelle du concept de réduction est la suivante :

> Étant donnés deux sous-ensembles de mots $A \subseteq \Sigma^*$ et $B \subseteq \Delta^*$, une *réduction* de A à B est une fonction totale et calculable $\sigma : \Sigma^* \to \Delta^*$ telle que pour tout $x \in \Sigma^*$,
>
> $$\boxed{x \in A \quad \text{ssi} \quad \sigma(x) \in B}$$

Théorème de Rice Par rapport à un ensemble récursivement énumérable,

1. qu'est-ce qu'une propriété triviale ?
2. combien de ces propriété triviales existe-t-il ?
3. qu'est-ce qu'une propriété monotone ?

Solutions

1. La fonction σ est celle qui
   (a) prend en entrée le mot $[M]\#[m]$ ('$\#$' fonctionne comme délimiteur) où $[M] \in \Sigma^*$ dénote le codage d'une machine de Turing M et $m \in \Sigma^*$ une entrée de celle-ci (cf. transparents 4-5 de la leçon 11), et
   (b) renvoie le codage $[M'] \in \Delta^*$ de la machine de Turing M' :
   $$[M]\#[m] \mapsto [M']$$

   Ainsi les ensembles A et B sont :
   $$A \stackrel{\text{def}}{=} \{ \ [M]\#[m] \mid M \text{ s'arrête avec } m \ \}$$
   $$B \stackrel{\text{def}}{=} \{ \ [M] \mid \epsilon \in \mathcal{L}(M) \ \}$$

   et σ est — par construction — totale et calculable, et pour tout x, $x \in A$ ssi $\sigma(x) \in B$ parce que notre machine M' accepte le mot vide ϵ ssi M s'arrête avec m.

2. (a) une telle propriété est soit universellement vraie, soit universellement fausse
   (b) 2, à savoir $\top$ et $\bot$
   (c) par définition, une propriété $P(A)$ d'un ensemble A est monotone si et seulement si pour tout A et B,
   $$\text{si } \ A \subseteq B \text{ et } P(A) \ \text{ alors } \ P(B)$$