Diagonalisation Montrez que les nombres réels $\mathbb{R}$ ne sont pas infiniment dénombrables en montrant par diagonalisation que rien que les nombres réels dans l'intervalle $[0,1[\subset \mathbb{R}$ ne le sont pas.[1]

Remarques :

1. si les nombres réels dans l'intervalle $[0,1[$ sont infiniment dénombrables, alors il existe une suite $r_1, r_2, r_3 \dots$ les énumérant.
2. utilisez la représentation décimale des nombres réels en excluant les représentations décimales des nombres réels qui se terminent en 999..., afin de garantir l'unicité de celles-ci.

Problèmes décidables et indécidables Soient

1. $\mathcal{M}$ l'ensemble des machines de Turing,
2. $M \stackrel{\text{def}}{=} \langle Q, \Sigma, \Gamma, \vdash, \_, \delta, s, t, r \rangle \in \mathcal{M}$, et
3. $\mathcal{L}(M)$ le langage accepté par M.

Le problème de décision :

M, accepte-elle le mot vide ϵ ?

est-il décidable ? En d'autres mots, la fonction (totale) $f : \mathcal{M} \to \{0,1\}$ définie telle que

$$f(M) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon \in \mathcal{L}(M) \text{ et} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle calculable ?

Procédez par réduction du problème de l'arrêt à ce problème de décision en construisant une machine $M' \in \mathcal{M}$ (informellement définie) qui exécute M comme "sous-routine", c'est-à-dire, comme faisant partie de δ.

[1] Cette preuve et la technique de diagonalisation a été inventée par Georg Cantor au début du 20e siècle.

Solutions

1. Supposons que les nombres réels de l'intervalle $[0, 1[$ soient infiniment dénombrables. Alors, *il existe une suite* $r_1, r_2, r_3 \ldots$ *les énumérant.*

   Soit un possible début d'une telle suite en représentation décimale :

$$\begin{array}{rcl}
r_1 & = & 0.\mathbf{0}105110\ldots \\
r_2 & = & 0.4\mathbf{1}32043\ldots \\
r_3 & = & 0.82\mathbf{4}5026\ldots \\
r_4 & = & 0.233\mathbf{0}126\ldots \\
r_5 & = & 0.4107\mathbf{2}46\ldots \\
r_6 & = & 0.99378\mathbf{3}8\ldots \\
r_7 & = & 0.010513\mathbf{0}\ldots \\
 & \vdots &
\end{array}$$

   et considérons les chiffres indiqués en gras :

   À partir de ces chiffres, définissons les chiffres décimales d'un nouveau nombre r comme suit :

   Si le n^{e} chiffre de r_n est 0 alors le n^{e} chiffre de r est 1.
   Si le n^{e} chiffre de r_n n'est pas 0 alors le n^{e} chiffre de r est 0.

   Dans notre cas, $r = 0.1001001\ldots$ qui est clairement un nombre réel entre 0 et 1. Par construction, ce nombre est différent dans son n^{e} chiffre de r_n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, tout nombre dans la suite est distincte de r dans au moins un chiffre, à savoir son n^{e}. En conséquence, r ne peut pas être dans la suite, et donc celle-ci n'est pas une énumération des nombres réels dans l'intervalle $[0, 1[$.

   Or, nous pouvons faire le même raisonnement pour *toute* suite de nombres réels dans l'intervalle $[0, 1[$. Et ainsi, *il n'existe pas de suite* $r_1, r_2, r_3 \ldots$ *les énumérant.*

   Par réduction à l'absurde nous concluons que les nombres dans l'intervalle $[0, 1[$ ne sont pas infiniment dénombrables.

2. Prenons une instance du problème de l'arrêt et réduisons-le au probléme de décision en considération :

   Soit $m \in \Sigma^*$ et construisons $M' \in \mathcal{M}$ tel que M'

   (a) efface tout mot $m' \in \Sigma^*$ presenté en entrée sur son ruban

   (b) écrit m sur son ruban

   (c) applique M à cette nouvelle entrée

   (d) accepte si et seulement si M s'arrête avec m

   où m et M sont codés dans δ.

   En conséquence,

$$\mathcal{L}(M') = \begin{cases} \Sigma^* & \text{si } M \text{ s'arrête avec } m \text{ et} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

   et

$$f(M') = \begin{cases} 1 & \text{si } M \text{ s'arrête avec } m \text{ et} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   En conclusion, f n'est pas calculable et donc notre problème de décision *indécidable* étant donné que le problème de l'arrêt est indécidable lui-même aussi.