Automates & Calculabilité — Série 9 — 15 déc 2003

Relations

1. $\equiv_A$ est une relation de Myhill-Nerode, et $\mathcal{L}(A_{\equiv}) = E$:
   voir pages 90 respectivement 92 du livre
2. si une relation $\equiv \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ est une congruence à droite, alors pour tout $m' \in \Sigma^*$, si $m \equiv n$ alors $m \bullet m' \equiv n \bullet m'$:

1	$m \equiv n$	hyp
2	$m \bullet \epsilon \equiv n \bullet \epsilon$	1, propr. de '•' (**CB**)
3	$m \bullet m' \equiv n \bullet m'$	hyp (**CI**)
4	$l \in \Sigma$	hyp
5	$(m \bullet m')\cdot l \equiv (n \bullet m')\cdot l$	3, congr. à droite
6	$(m \bullet m') \bullet "l" \equiv (n \bullet m') \bullet "l"$	5, déf. de '•'
7	$m \bullet (m' \bullet "l") \equiv n \bullet (m' \bullet "l")$	6, assoc. de '•'
8	$m \bullet (m'\cdot l) \equiv n \bullet (m'\cdot l)$	7, déf. de '•'
9	$l \in \Sigma \Rightarrow m \bullet (m'\cdot l) \equiv n \bullet (m'\cdot l)$	4, 8 ⇒-intro
10	$\forall(l \in \Sigma)(m \bullet (m'\cdot l) \equiv n \bullet (m'\cdot l))$	9, ∀-intro
11	$\forall(v \in \Sigma^*)(m \bullet v \equiv n \bullet v)$	2, 3, 10 induct. struct.
12	$m \equiv n \Rightarrow \forall(v \in \Sigma^*)(m \bullet v \equiv n \bullet v)$	1, 11 ⇒-intro

Théorème *voir page 98 du livre*

Application $E \stackrel{\text{def}}{=} \{\, a^n \bullet b^m \mid n > m \,\}$ n'est pas un ensemble régulier :

1. Soient $i > m$ et $j \leq m$.
2. Alors $a^i \bullet b^m \in E$, mais $a^j \bullet b^m \notin E$.
3. Donc il n'est pas vrai que $a^i \bullet b^m \in E$ ssi $a^j \bullet b^m \in E$, et ainsi $a^i \not\equiv_E a^j$. C'est-à-dire, a^i et a^j sont dans 2 classes d'équivalence différentes, et ceci *pour i aussi grand qu'il soit*. Donc $\equiv_E$ a un nombre infini de classes d'équivalence.